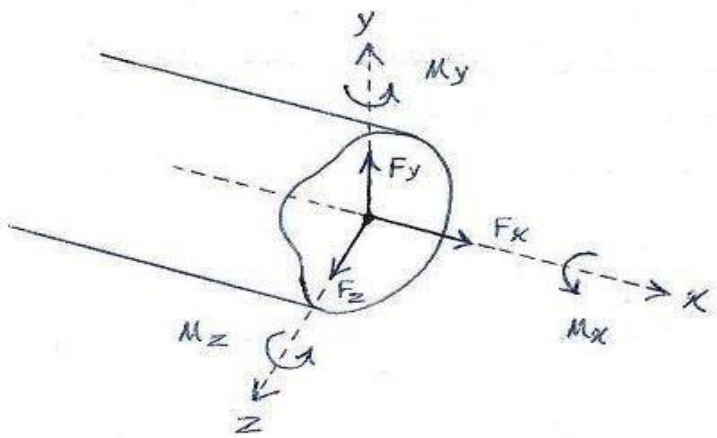
«بسم الله الرحمن الرحیم»

شماتیک عمومی :



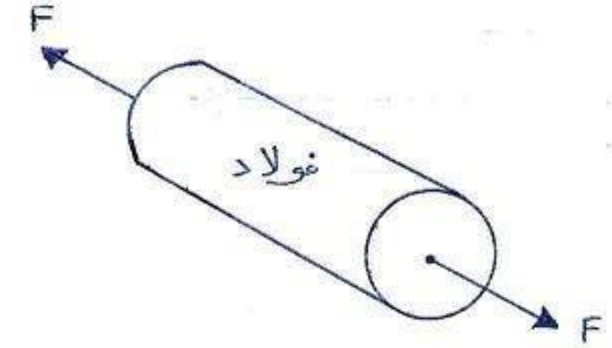
F_x : axial Force نیروی محوری

F_y و F_z : shearing Force نیروهای برشی

* F_xها ایجاد کشش یا فشار می کنند.

M_x : Twisting Couple گشتاور پیچشی

M_y , M_z : Bending Moment گشتاور خمشی



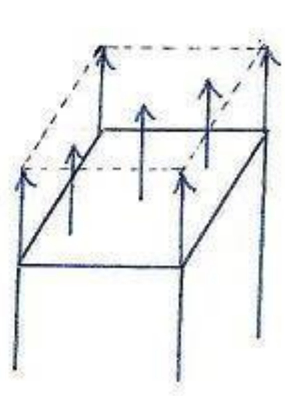
* تعریف مقاومت تنها بر حسب نیروی محوری - صحیح نیست بلکه به سطح مقطع هم بستگی دارد.

* تنش : توزیع نیرو بر واحد سطح $\sigma = \dfrac{F}{A} \quad (\dfrac{N}{m^2})$

* چون در بخش نیروی محوری هستیم این تنش را «تنش محوری» گویند.

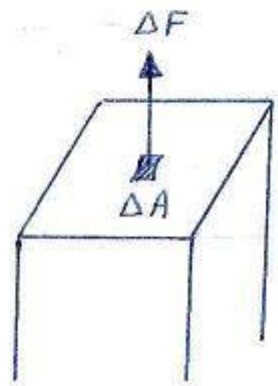
$$SI \begin{cases} Pa = \dfrac{N}{m^2} \\ M\,Pa = 10^6 \; Pa \\ G\,Pa = 10^9 \; Pa \end{cases}$$

$$\begin{cases} Psi = lb / in^2 \\ Psf = lb / ft^2 \end{cases}$$



$\sigma = \dfrac{F}{A}$

تنش محوری را تنش نرمال هم می گویند چون بر هر مقطعی موازی با سطح عمود است.



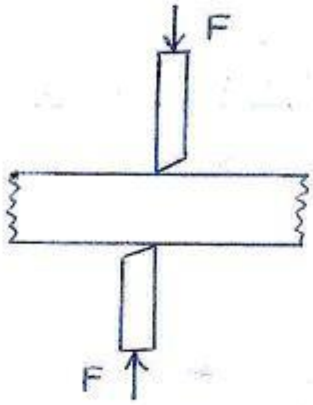
اگر توزیع تنش یکنواخت نباشد :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$dF = \sigma . dA$$

$$F = \int dF = \int \sigma \, dA$$

تنش برشی -

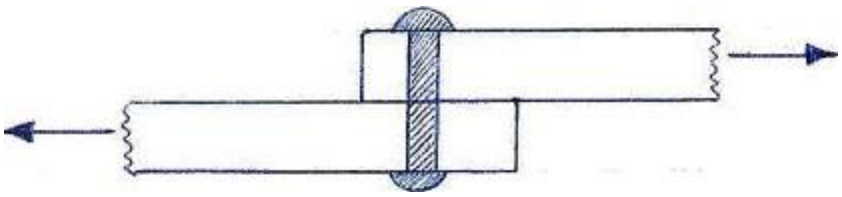


$$* \quad \tau_{ave} = \frac{F}{A}$$

$$* \quad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

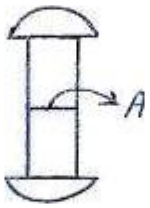
عمدتاً تحت نیروی قرار

پرچها

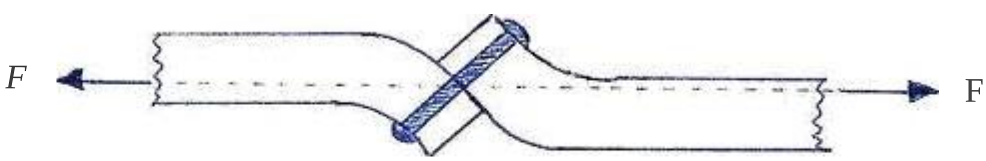


اهمیت مقاومت

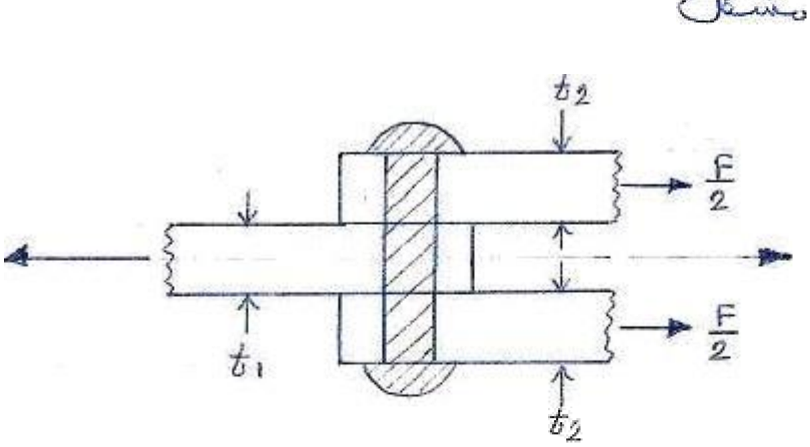
پین



به علت فاصله بین امتداد نیروهای وارده یک گشتاور پدید می‌آید -
که باعث deformation می شود.



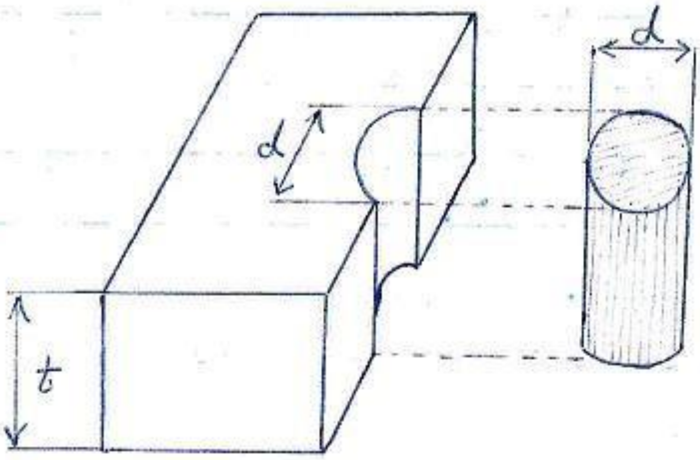
مشکل



$$\tau_{ave} = \frac{F}{2A} \qquad \text{double shear} \qquad (II)$$

برش دوبل

* امّا در مورد ورق یا صفحهٔ پشت پین : (تنش لهیدگی)
(تنش تکیه‌گاهی)
(Bearing stress)



I) $\sigma_b = \frac{F}{t.d}$

II) $\sigma_b = \frac{F}{2t_2 d}$

تنش حدّ نهائی - بالاترین تنشی که یک جسم می تواند تحمّل کند.
برای فولاد ساختمانی $3700\ Kg/cm^2$ است.

تنش

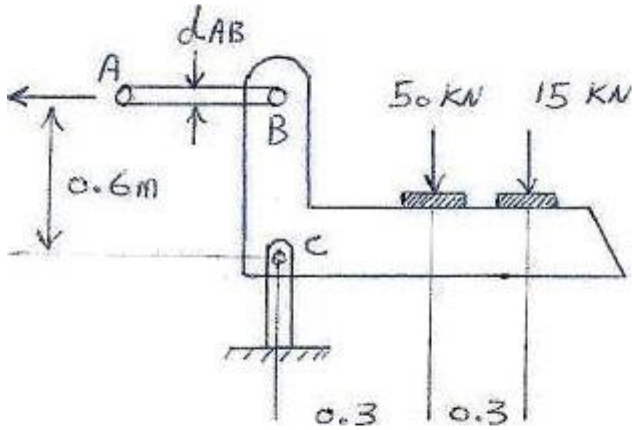
تنش

تنش

ضریب اطمینان

$$\ll \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} \qquad \tau_{all} = \frac{\tau_u}{F.S} \quad \gg$$

ضریب اطمینان تر محکمتر و
قطعات سنگین تر و قیمت تمام شده بالاتر است. در صنایع
dl, هوائی ضریب اطمینان را بالا نمی برند تا هواپیما سنگین نشود
در کیفیت مصالح دقت می کنند.

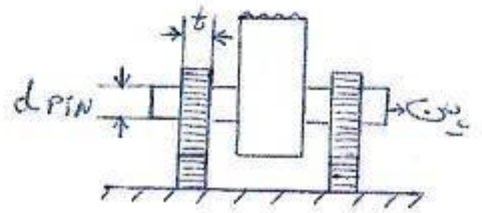


پین C :

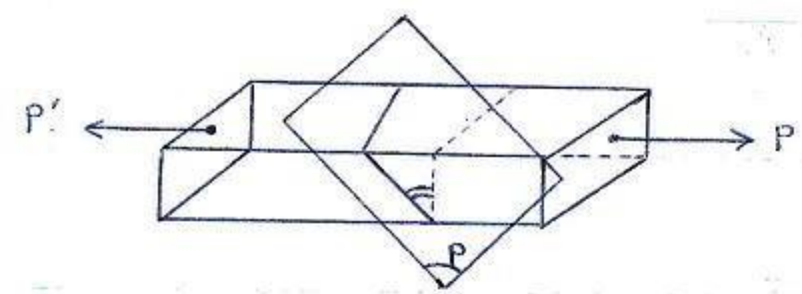
$$\tau_u = 350 \ MPa$$
$$d_{PIN} = ?$$
$$F.S. = 3.3$$

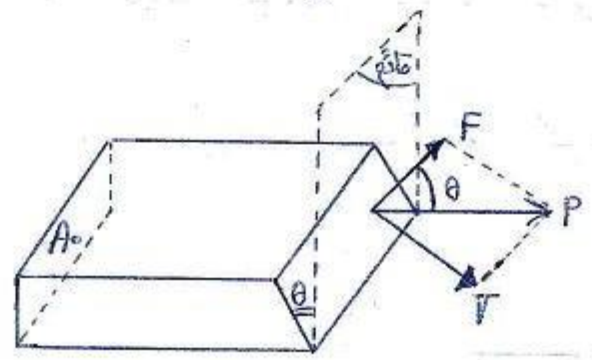
تکیه‌گاه C :

$$\sigma_{all} = 300 \ MPa$$
$$t = ?$$



تنش در صفحهٔ مایل :





F - عمود بر صفحه قائم

V - مماس بر صفحه قائم

$$F = P\cos\theta \qquad A_0 = A_\theta \cos\theta$$
$$V = P\sin\theta \qquad A_\theta = \frac{A_0}{\cos\theta}$$

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} \rightarrow \sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{A_0/\cos\theta} \rightarrow \tau = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta$$

بحث -

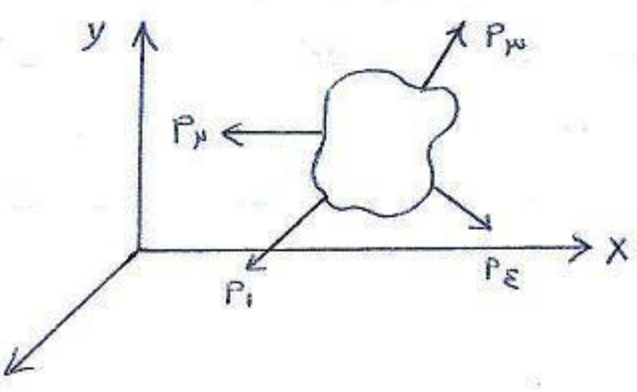
۱) $\theta = 0$ $\qquad \sigma_{max} = \frac{P}{A_0}$

۲) $\theta = 90^\circ$ $\qquad \sigma = 0$

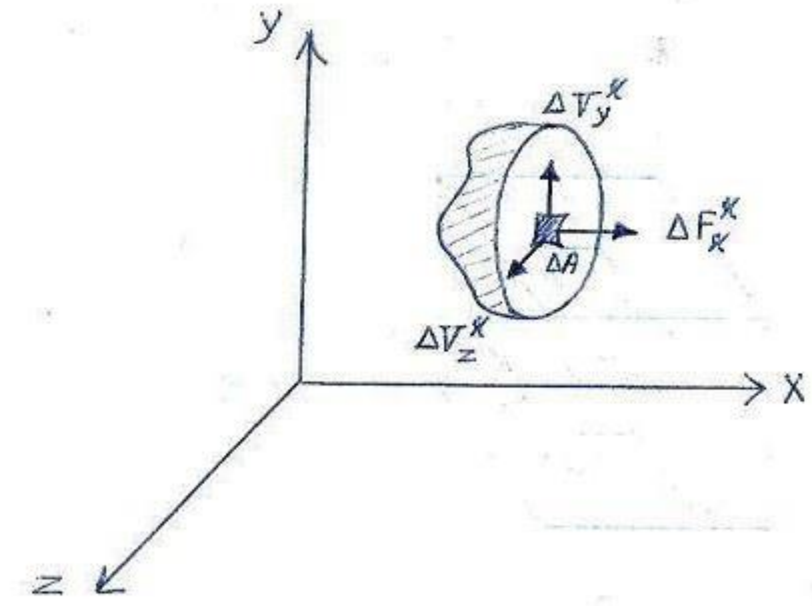
۳) $\theta = 45^\circ$ $\qquad \begin{cases} \tau_{max} = \frac{P}{2A_0} \\ \sigma = \frac{P}{2A_0} \end{cases}$

* اگر جسمی در تمام جهات تحت نیرو قرار بگیرد یا :

« تنش در شرایط کلی بارگذاری »



الف - جسم را با صفحه‌ای موازی y-z قطع می‌کنیم :



F_x^x : x بالائی صفحه قطع کننده را مشخص می‌کند (که صفحه y-z است عمود بر محور x) . اندیس پایینی جهت نیرو را نشان می‌دهد .

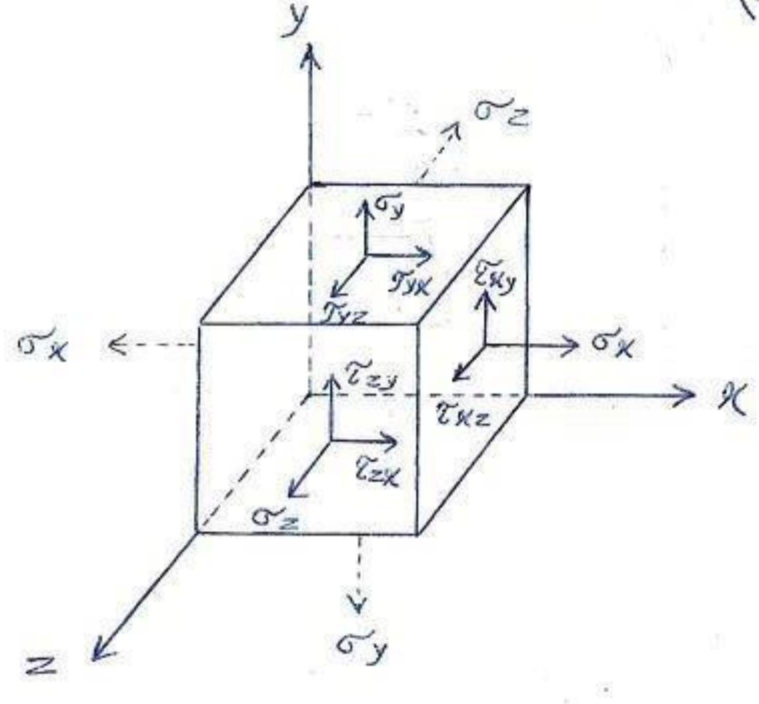
$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta F_x^x}{\Delta A} \\
\tau_{xy} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \\
\tau_{xz} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta V_z^x}{\Delta A}
\end{cases}
$$

برای حالت الف - $\sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}$

برای حالت ب - $\tau_{yx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{yz}$

برای حالت ج - $\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_{zz}$

* اگر پس از قطع، قطعهٔ سمت راست را در نظر بگیریم باز هم (۹) حالت تنش خواهیم داشت.



* در هر وجه مکعب سه مؤلفه داریم لذا در کلی ترین حالت برای یک المان مکعبی شکل ۱۸ تنش داریم که اگر در حالات خاص دو بدو τ ها را مساوی فرض کنیم حداقل (۹) تنش خواهیم داشت.

* تنش از جنس بردار نیست و مانند نیرو نمی باشد و لذا نقطهٔ اثر برای آن معنی ندارد و روی سطح تعریف می شود. تنش به زاویه صفحه هم بستگی دارد.
* تنش تانسور مرتبهٔ دوم است. کمیتهای اسکالر تانسور مرتبهٔ صفرم هستند و کمیتهای برداری تانسور مرتبهٔ اول هستند.

نکته - اگر در حالت فوق نیروها را ($F = \sigma \cdot A$) قرار دهیم و برای حالت تعادل استاتیکی حول یکی از محورها - گشتاور بگیریم به نتیجه جالبی می رسیم:

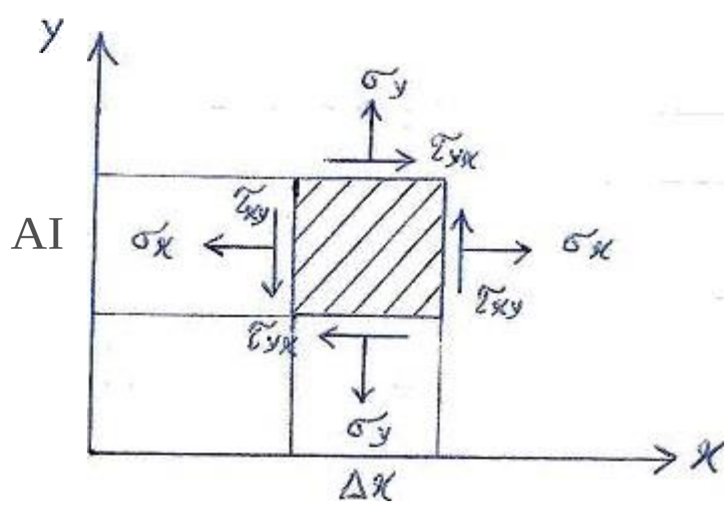
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

تنشهائی که روی دو وجه عمود بر هم به یکدیگر نزدیک ...
باهم برابرند . پس برای حالت کلی کافیست تنها ۶ ...
(سه تا محوری و سه تا برشی) را تعریف کنیم .

* اگر روی یکی از دو صفحه عمود بر هم ... برش بوجود
آید روی دیگری هم پدید می آید .

تنش ... محوری

مثلاً برای صفحه ها .

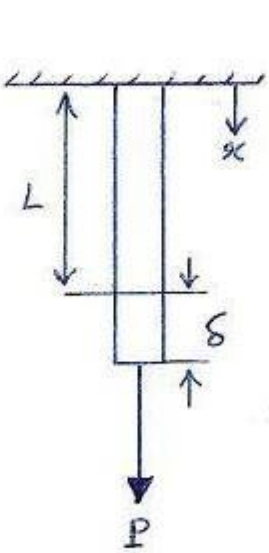


* مانند حالت قبل : « $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ »

تغییر فرم : « Deformation »

* بحث ما فعلاً در نیروهای محوری (فشاری ، کششی) است.
* عوامل مؤثر در کاهش یا ازدیاد طول :

۱- سطح مقطع
۲- جنس
۳- طول



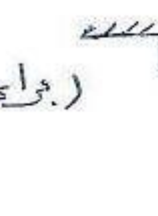
تغییر طول = δ = Elongation

تغییر طول نسبی = ε = Strain

« $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ کرنش »

« $\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$ »

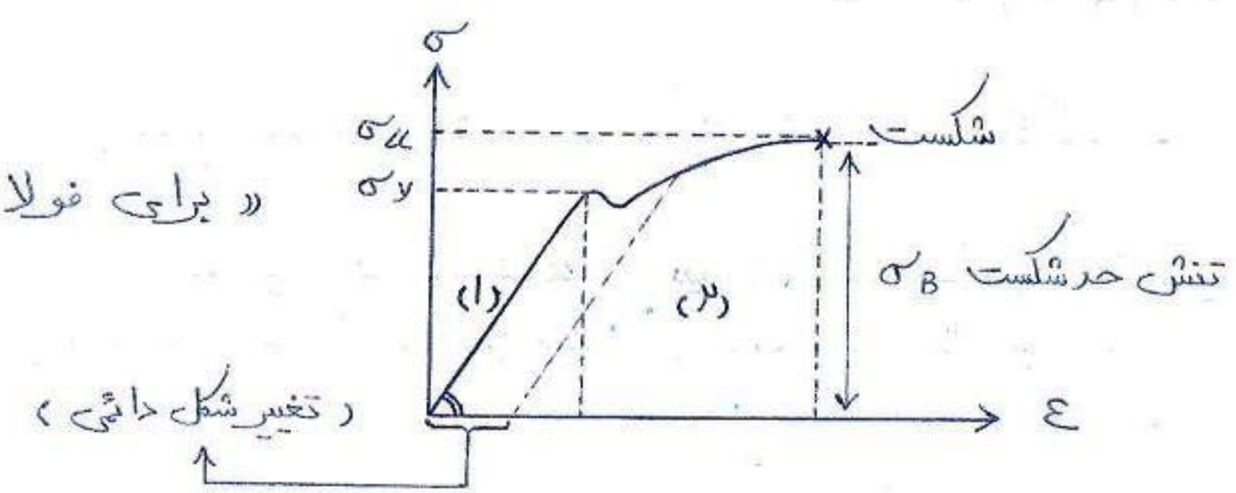
(برای مقاطع ناهمگن)



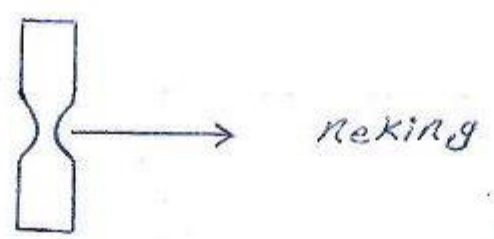
* کرنش دیمانسیون ندارد .

رابطه (دیاگرام) تنش و کرنش :

* دیاگرام (σ - ε) بستگی مستقیم به جنس دارد و به صورت تجربی بدست می آید .



σ_u - ultimate stress تنش حد نهائی
σ_y - yield stress تنش حد تسلیم
σ_B - Braking stress تنش حد شکست



ناحیه (۱) : ناحیه الاستیک
ناحیه (۲) : ناحیه پلاستیک

* در مقاومت مصالح بحث عمده ما در رابطه با طراحی اجسام در ناحیه الاستیک است.

* مسئله ای که به ویژه درمورد فولادها بسیار مهم است این است که رفتار فولادها در ناحیه الاستیک خطی است :

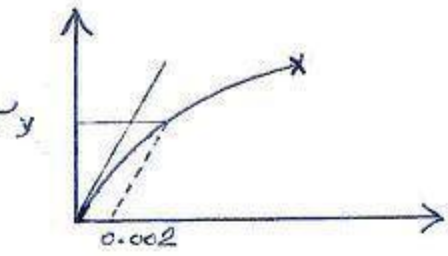
* E : ضریب زاویه

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

« قانون هوک »

* هر قدر جسم سختتر باشد E بزرگتر است و بالعکس.

درمورد اجسامی که ductile نیستند و در ناحیه الاستیک به صورت منحنی تغییر می کنند تقریب 0.2% در نظر می گیرند :



0.2% offset method

درصد ازدیاد طول - (Percent Elongation)

هر قدر E بزرگتر باشد درصد ازدیاد طول کمتر است لذا فولادهای ساختمانی را از جنس نرم انتخاب می کنند.

$$\text{درصد ازدیاد طول} = \frac{L_B - L_o}{L_o} \times 100$$

Braking - B

مقطع

$$\text{درصد کاهش سطح مقطع} = \frac{A_0 - A_B}{A_0} \times 100$$

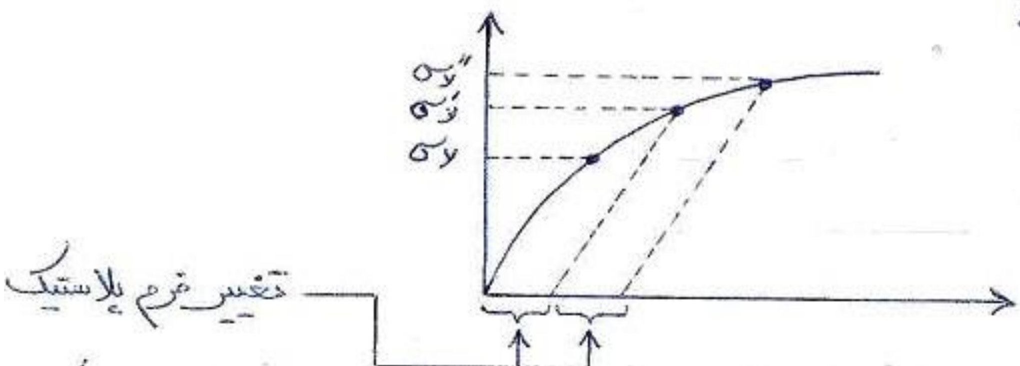
$\sigma = \frac{P}{A_0}$ تنش تقریبی و مهندسی است چون مرتباً سطح مقطع کاهش می یابد و تنش واقعی از تقسیم لحظه‌ای P به A همان لحظه بدست می آید $\sigma = \frac{P}{A}$.

به همین ترتیب $\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$ کرنش مهندسی است و $\Delta\varepsilon = \frac{\quad}{L}$:

$$\varepsilon_t = \Sigma \Delta\varepsilon \quad \Sigma \Delta L / L = \int_{L_0} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

« کرنش واقعی » $\varepsilon_t = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$

روش کرنش سختی :
(strain hardening)

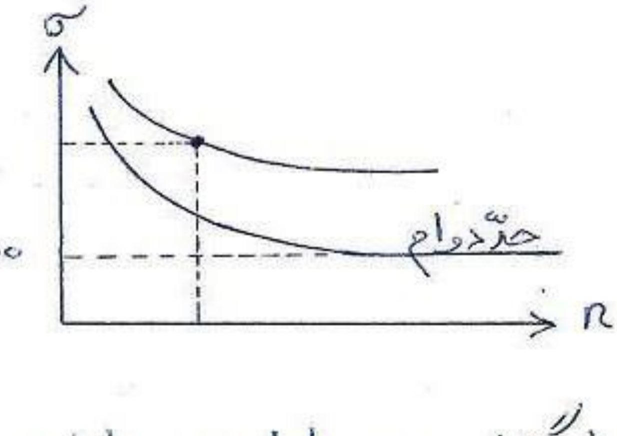


اگر در صنعت چند بار جسم را تحت کرنش قرار دهیم و به حد پلاستیک برسانیم و سپس ول کنیم تنش حد تسلیم جسم بالا می رود (به شرط آن که به اندازه باشد) . چکش کاری سطح بعضی قطعات (مثل محور قطار) نیز به همین دلیل می باشد.

خزش (creep) : اگر قطعه‌ای در ناحیه الاستیک طراحی و بارگذاری شود اما بار به مدت طولانی روی جسم قرار گیرد ، جسم دفرمه می شود و به شکل اولیه باز نمی گردد. خزش به دما هم بستگی دارد.

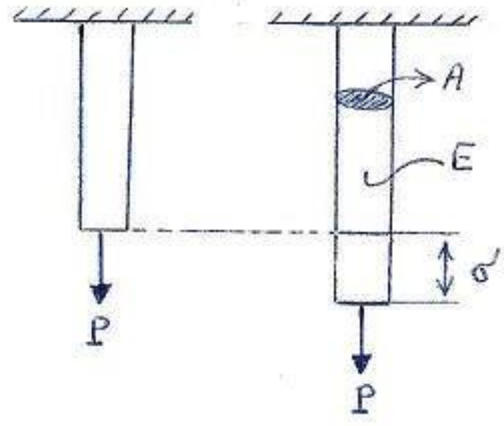
خستگی (fatigue) : در اثر بارگذاری متناوب این پدیده در جسم رخ می دهد که موجب شکست جسم می شود.

* برای مواد مهندسی یک نمودار ارائه می شود که معمولاً این نمودارها از یک حدی به بعد مستقیم می شوند که به آن حد دوام گویند که از آن پس می توان بطور دائمی به آن اطمینان داشت.



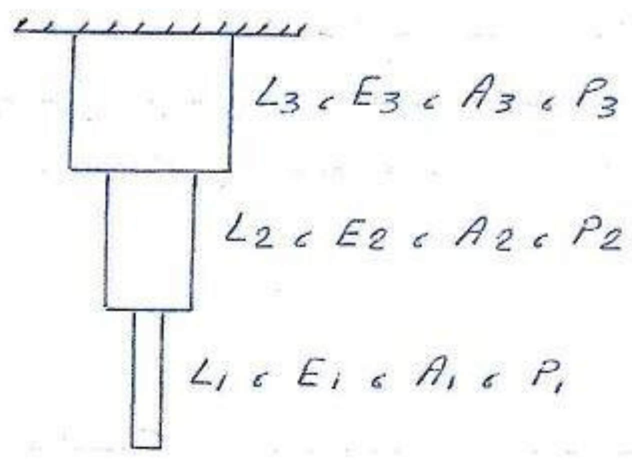
n - تعداد دفعات بارگذاری در طول عمر طراحی شده جسم.

تغییر فرم تحت بارگذاری محوری :



$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{P}{A} \\ \sigma = E\,\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{P}{AE} \\ \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{PL}{AE}}$$

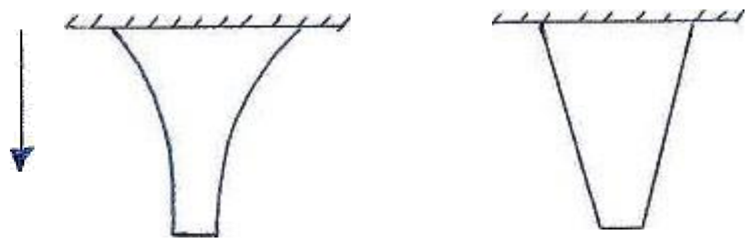
حالت کلی -



$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i\,L_i}{A_i\,E_i}$$

* این برای مقاطعی است که می توان آنها را تقسیم بندی کرد.

برای تقسیم نیست

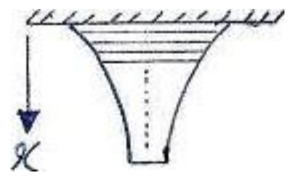


$$\frac{d\delta}{dx}$$

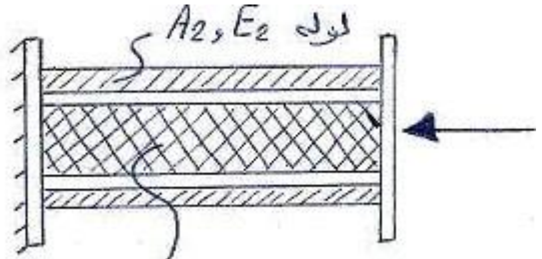
$d\delta \quad \varepsilon\, dx$

$E \longrightarrow \boxed{\delta = \int_0^L \frac{}{AE}}$

امّا P هم می تواند تغییر کند مثلاً در یک میله آویخته نیروی وزن در لایه های بالائی بیشتر است و در لایه های پایین کمتر یعنی P هم تابع x می شود.



مسائل نامعیّن



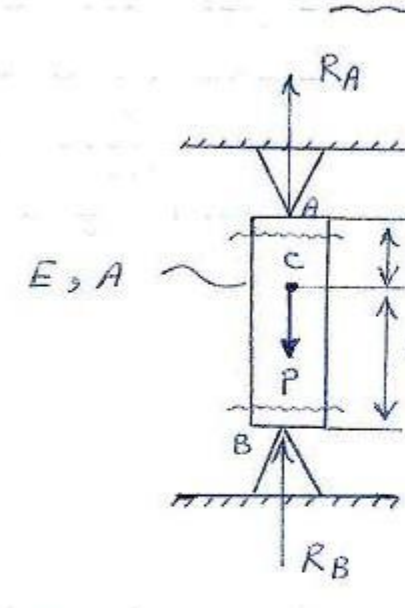
این مسئله از نظر استاتیکی نامعین است چون فقط معادلهٔ : $P = P_1 + P_2$ را دارد اما به کمک مقاومت مصالح :

$$P = P_1 + P_2 \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \\ \delta_2 &= \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\delta_1 = \delta_2} \quad \frac{P_1 L}{A_1 E_1} = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad (II)$$

$$(I)\ ,\ (II) \Rightarrow \quad * \ P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

$$* \ P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$



مثال 2 - عکس العمل هر تکیه گاه چقدر است ؟

استاتیک $\rightarrow \quad R_A + R_B = P \quad (I)$

* در مقاومت مصالح می گوییم مجموع تغییر طولها باید صفر شود :

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

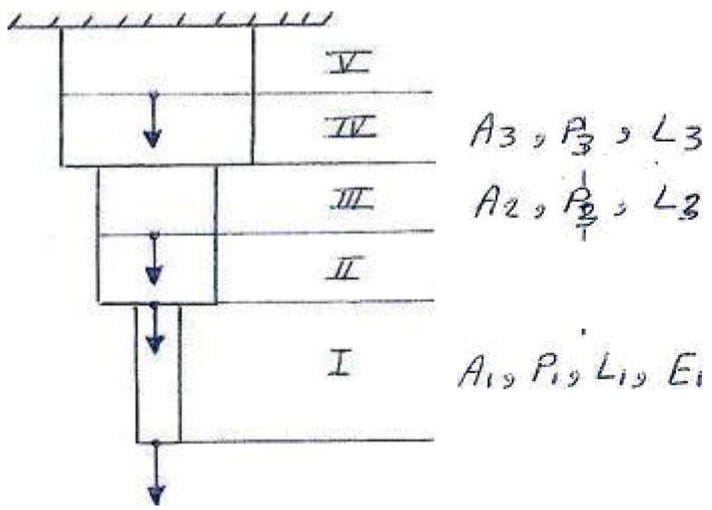
* در مقطع پایین نیروی داخلی R_B و فشاری و منفی است

و در مقطع ... مثبت است

$$P E \quad \frac{i}{} - \frac{R_B L_2}{AE} = 0 \qquad (II)$$

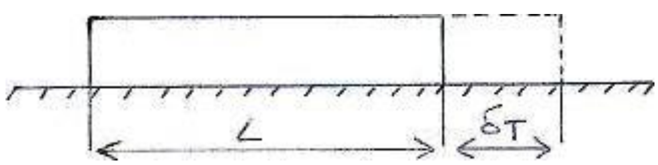
$$(I) \text{ و } (II) \Rightarrow \quad * \; R_A = \frac{P L_2}{L}$$

راه حل دوم ... از اصل جمع بندی آثار جداگانه یا



هرجا سطح مقطع یا نیرو عوض شود - یک مقطع جدید - پدید می آید .

تغییر طول حرارتی

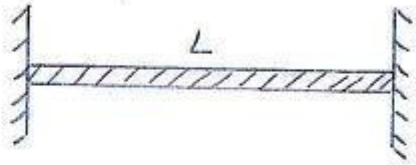


چون تغییر طول داریم پس سراغ کرنش می‌رویم :

$$\delta_T = \alpha (\Delta T) L$$

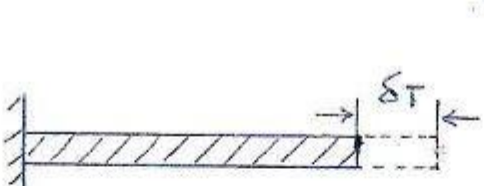
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_T = \alpha \Delta T}$$

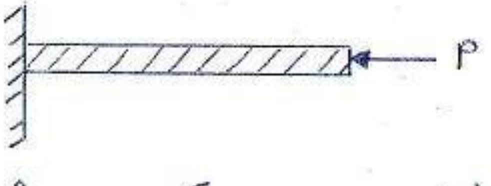
* کرنش حرارتی (Termal Strain) تنها کرنشی است که بدون تنش پدید می‌آید.



** اگر قطعه بین دو تکیه گاه قرار گیرد و حرارت ببیند یا سرد شود در آن تنش پدید می‌آید اما کرنش ظاهر نمی‌شود چون امکان ازدیاد طول وجود ندارد و این تنها حالتی است که تنش بدون کرنش - داریم.

* برای حل این مسئله نامعین از super position استفاده می‌کنیم و یک تکیه گاه را حذف می‌کنیم :





* P نیروی وارد از تکیه گاه حذف شده است.
اثر تکیه گاه فرضی این است که مانع بروز δ_T می‌شود :

$$\left.\begin{array}{l} \delta_T = \alpha(\Delta T)L \\ \delta_P = \dfrac{PL}{AE} \quad (\text{اثر تکیه‌گاه فرضی}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\delta_T + \delta_P = 0]{\text{باید}}$$

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

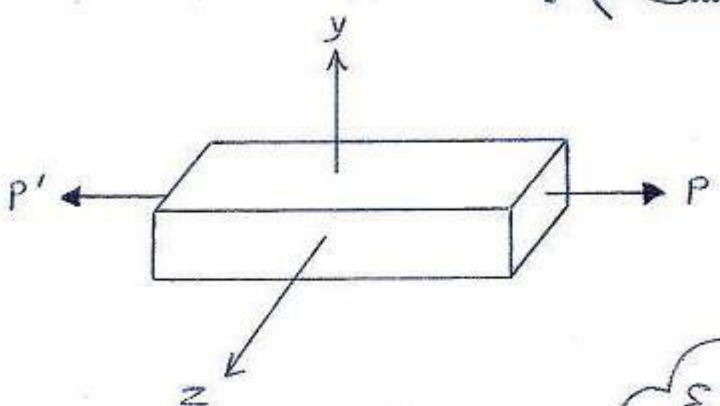
$$* \; P = -AE\alpha(\Delta T)$$

$$\left(\sigma = \frac{P}{A}\right) \rightarrow \; * \; \sigma_T = -E\alpha(\Delta T)$$

کرنش سه بعدی :

* $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ کرنش محوری (قانون هوک)

* قانون هوک در حالتی صدق می کند که بارگذاری الاستیک باشد و جسم همگن و ایزوتروپ است (یعنی مدول الاستیسیته در سه جهت x و y و z یکسان است).



کرنش جانبی $\varepsilon_y = \varepsilon_z$

« lateral Strain »

ضریب پواسون – ν (نو) = $\dfrac{\text{lateral Strain}}{}$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

tx

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x \\ \dfrac{-\nu \sigma_y}{E} = \varepsilon_x \\ \dfrac{-\nu \sigma_z}{E} = \varepsilon_x \end{cases}$$

$$* \quad \varepsilon_y \quad \frac{\sigma_y}{E} \quad - \quad E \quad E$$

$$E \qquad E \qquad E$$

(قانون ... هستند ... ستیک

تغییر حجم

مکعب واحدی را در نظر می گیریم :

* حجم اولیه $= 1 \times 1 \times 1 = 1$

* حجم جدید $= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$

بدلیل کوچکی

* حجم جدید $= 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \cancel{2\varepsilon_x\varepsilon_y} + \cancel{2\varepsilon_y\varepsilon_z}$
$\cancel{\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z} + \cancel{2\varepsilon_x\varepsilon_z} + \cancel{2\varepsilon_z\varepsilon_x}$

* حجم جدید $= 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

« اختلاف حجم واحد حجم $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ »

« $\Delta V = e \cdot V$ »

(اما) : $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) - 2\nu(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right]$

** $e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

حالت خاص « فشار هیدرواستاتیک » :

ε_x و ε_y و ε_z هر سه منفی (فشاری) بوده و باهم برابرند.

$$* \quad e = -\frac{3(1-2\nu)}{E}\,P$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$ مدول بالک (فشار)

$$* \quad e = -\frac{P}{K}$$

* K برای هر مادّه‌ای مقدار ثابتی است چون E و ν مقادیر ثابتی برای هر ماده هستند. واحد K، پاسکال است.

بحث: $e = -\frac{P}{K}$ باید همواره منفی باشد و چون $E > 0$ است پس باید $K > 0$ باشد، $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ پس باید:

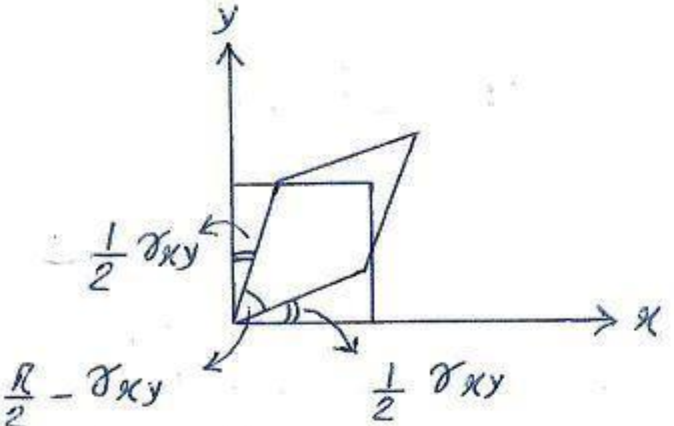
$$* \quad (1-2\nu) > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nu < \frac{1}{2} \\ \nu = \left|\frac{L.S}{A.S}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

برای تمامی مصالح: $0 < \nu < \frac{1}{2}$

* برای مایعات تراکم ناپذیر بطور ایده‌آل « $\nu = \frac{1}{2}$ »

* تنش برشی تنها زوایای قطعه را تغییر می دهد امّا تغییر طول نمی دهد (مثل قوطی کبریت که تحت نیروهای برشی قرار بگیرد).

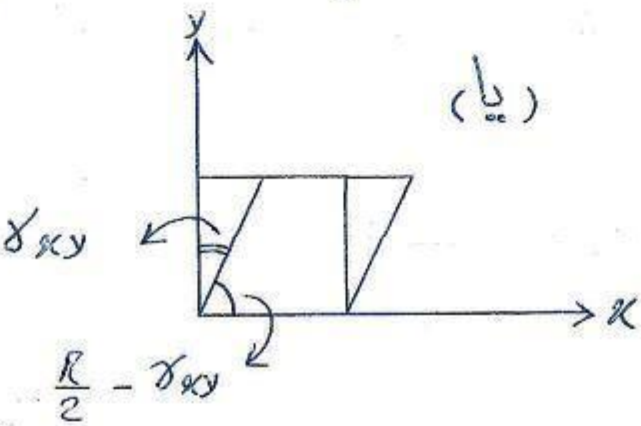
حالت دو بعدی :



γ_{xy} : کرنش برشی

(shearing strain)

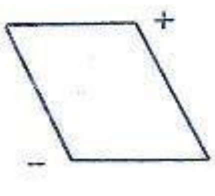
(یا)



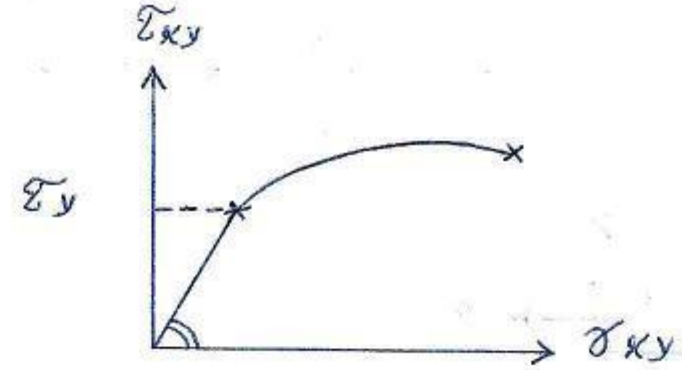
γ باید حتماً بر حسب رادیان باشد.

* اگر طولها در جهت $+x$ و $+y$ باشند و کاهش زاویه داشته باشیم علامت کرنش برشی + است و اگر یکی از آنها تغییر کند علامت - است.

مثال -



منفی



* در حوزهٔ الاستیک :

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

G : مدول برشی (Pa)
(مدول صلبیت)

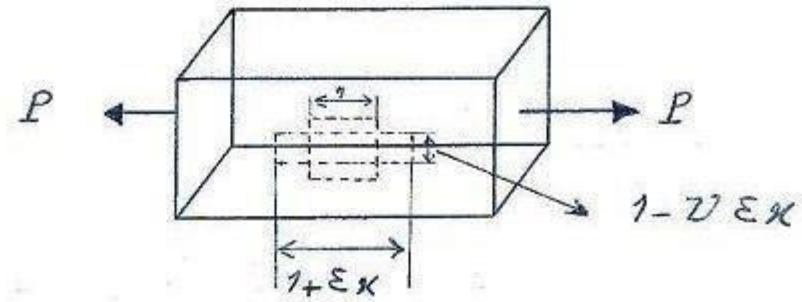
« مجموعه کلیهٔ قوانین هوک » :

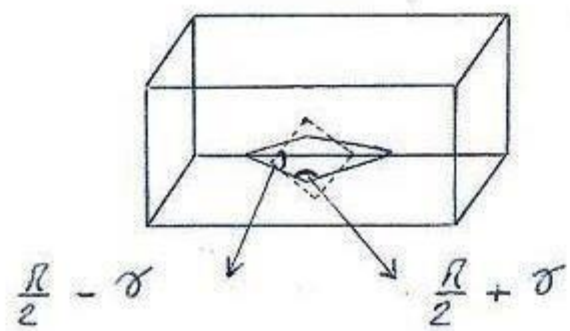
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \end{cases}$$

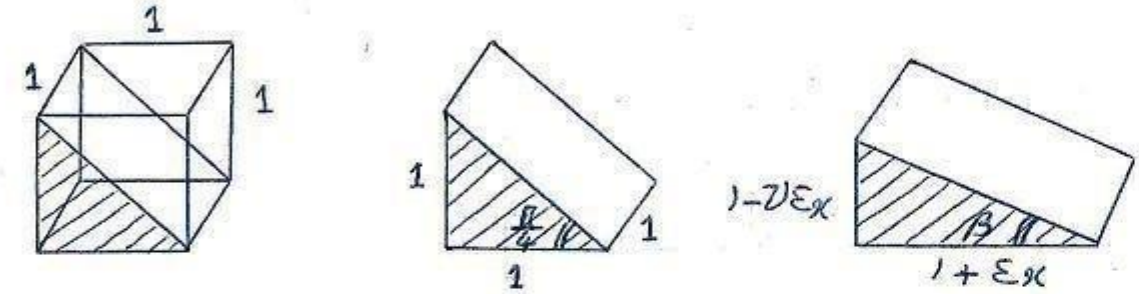
G از جنس E است و همواره :

$$\left(\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E\right)$$

رابطهٔ E و G و ν :







$$* \quad \beta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}\right)$$

$$\tan\beta = \frac{\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma_m}{2}\right)}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}}$$

(در مثلث) : $\tan\beta = \dfrac{1 - \nu\,\varepsilon_x}{1 + \varepsilon_x}$

$$\gamma_m = \frac{(1+\nu)\,\varepsilon_x}{1 + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_x} \Rightarrow \boxed{\gamma_m = (1+\nu)\,\varepsilon_x}$$

$$\frac{\tau_m}{G} = (1+\nu)\,\frac{\sigma_x}{E} \quad \leftarrow \quad \left(\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}\right)$$

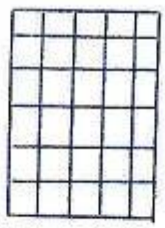
$$G = \frac{E}{1+\nu} \times \frac{\tau_m}{\sigma_x}$$

$$\left(\sigma_x = \frac{P}{A} \quad , \quad \tau_m = \frac{P}{2A}\right) \quad \Rightarrow$$

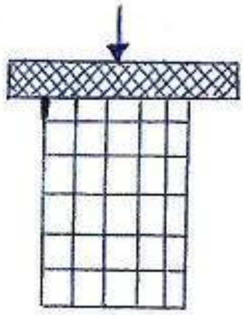
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

m - علامت Max
و در زاویه $\frac{\pi}{4}$ است.

نحوه بارگذاری و تأثیر آن در تنش :

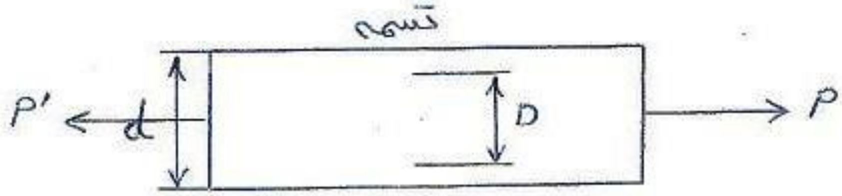


* به همین علت است
که روی خاک فونداسیون
می گذارند وروی آن هم
صفحه فولادی صلب قرار می دهند
وسپس تیر آهنها را برپا می کنند.



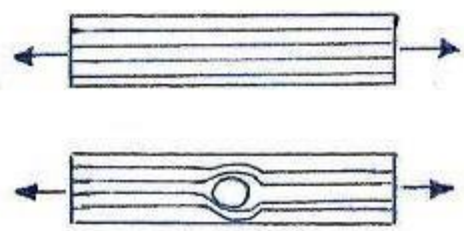
اصل سَنت وِنان - اگر بار بطور متمرکز وارد شود در ناحیه اعمال
بار هیچ یک از این روابط صادق نیست و با
آنها نمی توان آنالیز تنش کرد.

تمرکز تنش :

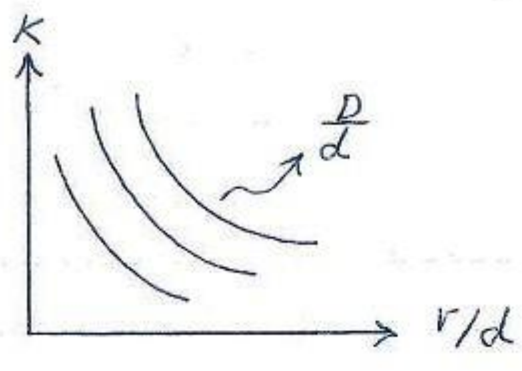


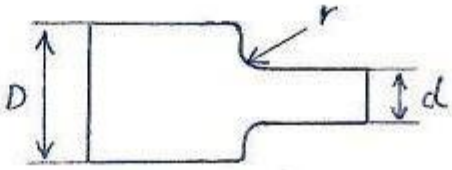
* اگر سطح Min را با (d-D) محاسبه کنیم و تنش بحرانی را یافته و تسمه را طراحی کنیم می بینیم که در عمل تسمه پاره می شود، علت این امر (تمرکز تنش) است :

$$« \sigma = \underbrace{K}_{\text{ضریب تمرکز تنش}} \frac{P}{A} »$$



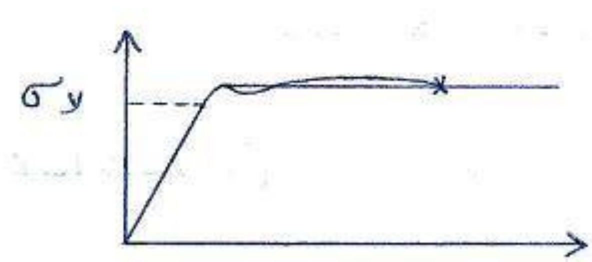
* باید حتی المقدور از گوشه های تیز ممانعت کرد و شعاعی مثل r به آن داد .





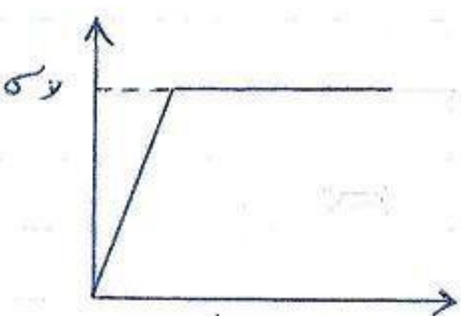
تغییر فرم پلاستیک :

* معمولاً برای کارهای عادی مهندسی ناحیه پلاستیک را با یک خط یا منحنی تقریب می زنند از جمله مدل (الاستو پلاستیک) :



مثال- میله ای را تحت کشش قرار می دهیم سپس بار را برمی داریم تغییر فرم دائمی آن چقدر است؟

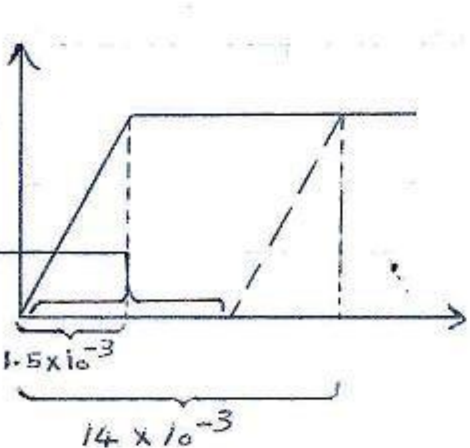
$$\begin{cases} L = 500\ mm \\ A = 60\ mm^2 \\ E = 200\ GPa \\ \sigma_y = 300\ MPa \\ \Delta L = 7\ mm \quad \text{ازدیاد طول} \end{cases}$$



«مدل الاستو پلاستیک»

$$\frac{7}{500} = 14 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{300 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.5 \times 10^{-3} \quad \text{کرنش حد تسلیم}$$



$$\varepsilon_D = \varepsilon_c - \varepsilon_y = 14 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3}$$
$$\varepsilon_D = 12.5 \times 10^{-3}$$

$$\delta_D = L . \varepsilon_D = 12.5 \times 10^{-3} \times 500$$

$(\delta_D = 6.25\ mm)$ (Diformation - D)

تنشهای باقیمانده - « Residual Stress »

۱- تأثیرات حرارت : فولادها در دمای بالا مدول الاستیسیته خود را از دست می‌دهند و نرم می‌شوند.

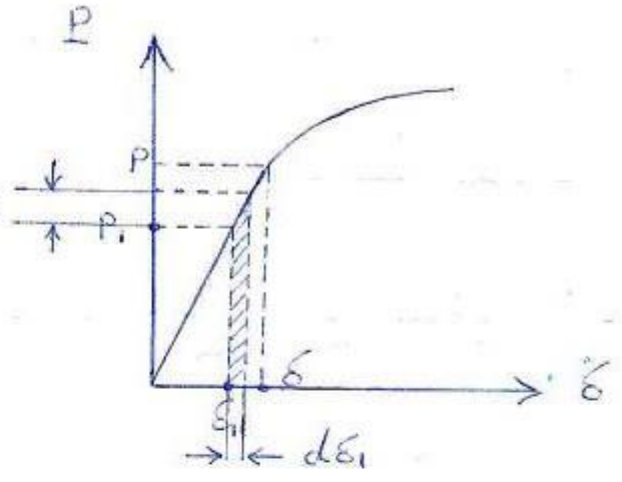
* اگر میل گرد کوچکی را برای بالابردن جسمی فولادی به آن جوش دهیم به علت بالارفتن دمای آن در موقع سرد شدن یک تنش باقیمانده در آن ذخیره می‌شود.

راه حل ۱- کل مجموعه را مدتی در کوره قرار دهیم تا تنش زدائی یا (Stress Relief) شود.

راه حل ۲- جسم بزرگ را پیش از جوشکاری بطور موضعی (پیش گرم) کنیم.

انرژی کرنشی (Strain Energy) :

وقتی تغییر فرم داریم علت آن وجود نیرو است و این نیرو کاری انجام می دهد که ذخیره می شود. ما حالت بارگذاری استاتیکی را بررسی می کنیم (یعنی بار از صفر شروع شده به Max می رسد، برعکس بارگذاری دینامیکی که بار یکمرتبه و به همراه انرژی جنبشی وارد می شود و بارگذاری ناگهانی که نیروی وزن یکمرتبه وارد می شود).

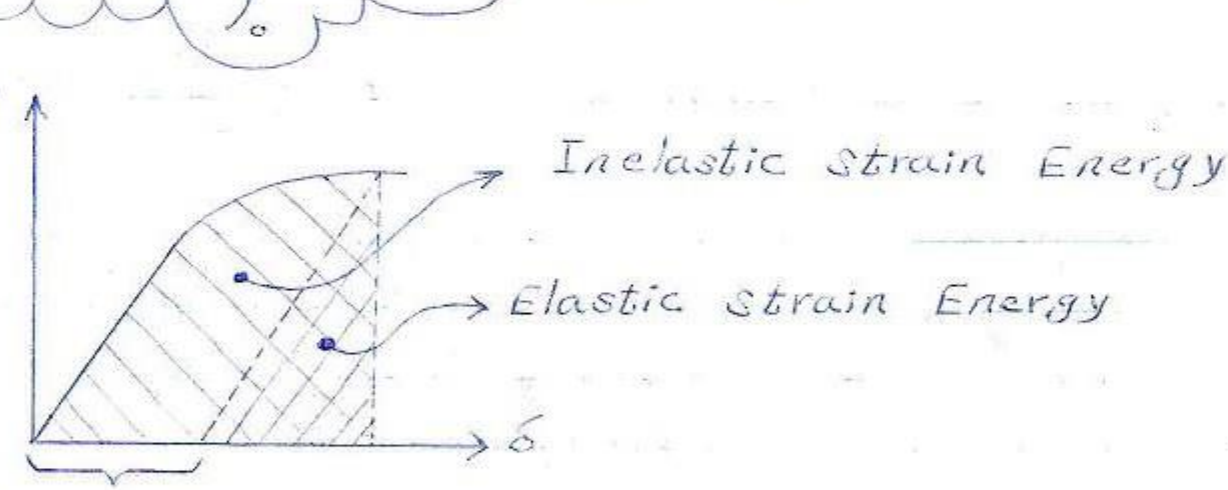


Load - deflection diagram

سطح زیر منحنی = $P_1 \, d\delta_1$

$$W = \int_0^{\delta} P_1 \, d\delta_1$$

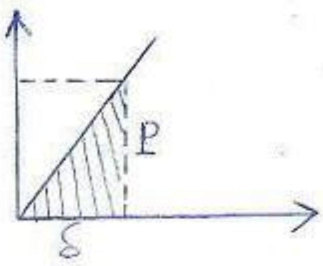
$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 \, d\delta_1$$ انرژی کرنشی



در حالت پلاستیک :

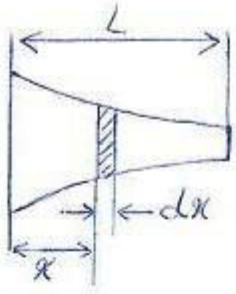
$$U = W = \frac{P\delta}{2}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{P^2 L}{2AE}$$



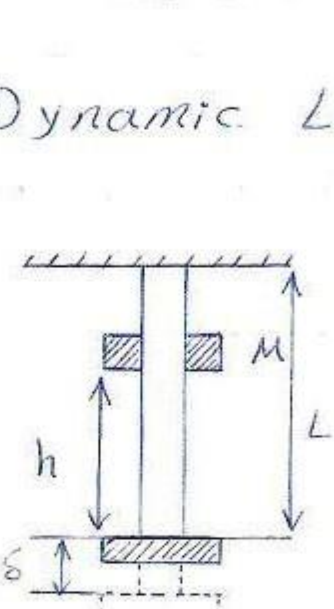
$$U = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

در حالت سطح مقطع متغیر :



$$U = \int_0^L \frac{P_{(x)}^2 \, dx}{2E \, A_{(x)}}$$

بارگذاری دینامیکی : « Dynamic Loading »



* فرض - ناحیه الاستیک است.
M پس از برخورد باز نمی گردد.
انرژی گرمائی تولید نمی شود.

$$E_P = Mgh - \frac{1}{2} M V^2 \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

$$\begin{cases} \text{انرژی پتانسیل کل} \\ \text{انرژی کرنش} \end{cases} \qquad W(h+\delta) = Mg(h+\delta)$$

$$W(h+\delta) = \frac{EA\delta^2}{2L} \Rightarrow EA\delta^2 - 2LW\delta \quad 2LWh = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \delta \quad \frac{WL}{EA} + \left[\left(\frac{WL}{EA} \right)^2 + \frac{2WLh}{EA} \right]^{1/2}$$

$$\delta = \delta_{st} + \left(\delta_{st}^2 + 2h\,\delta_{st} \right)^{1/2}$$

$$\delta = \sqrt{2h\,\delta_{st}} \quad \leftarrow$$

$$\sigma \quad E\varepsilon \qquad E\,\frac{\delta}{L} \qquad \frac{W}{A} > \left[\left(\frac{W}{A} \right)^2 + \frac{2WhE}{AL} \right]^{1/2}$$

$$\sigma = \sigma_{st} + \left(\sigma_{st}^2 + \frac{2hE}{L}\, \sigma_{st} \right)^{1/2}$$

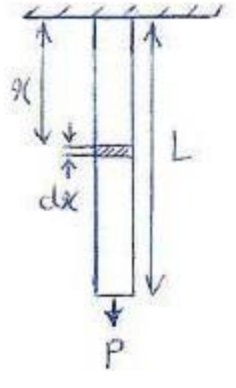
تنش در حالت بارگذاری دینامیکی

بارگذاری ناگهانی : تفاوت آن با حالت دینامیکی این است که $h=0$ است.

(suddenly applied loads)

$$h = 0 \Rightarrow \delta = 2\,\delta_{st}$$

مثال -



A و E و γ و L

(P + وزن)

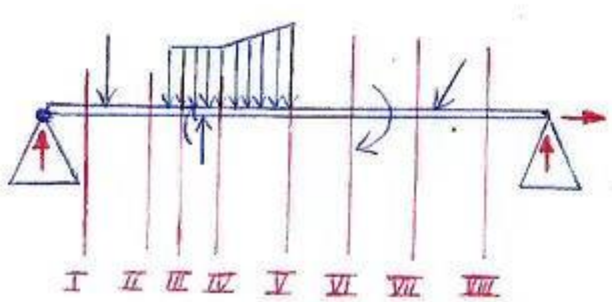
تحت تأثیر این نیروی متغیر انرژی کرنشی چقدر است؟

$$U = \int_0^L \frac{P_x^2\, dx}{2EA_x} \qquad \langle\!\langle\, P_x = \gamma A (L-x) + P \,\rangle\!\rangle$$

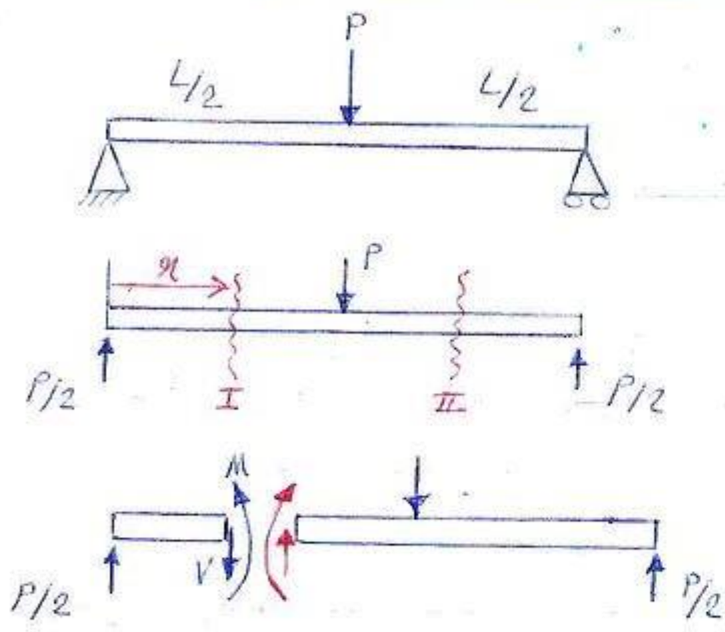
$$U = \int_0^L \frac{[\gamma A (L-x) + P]^2\, dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E} + \frac{\gamma P L^2}{2E} + \frac{P^2 L}{2AE}$$

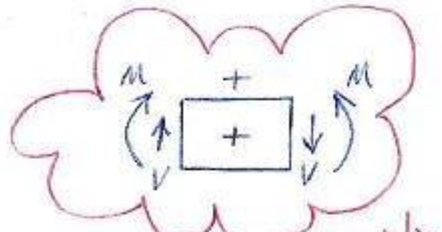
رسم دیاگرامهای نیروی برشی ، محوری و گشتاور خمشی :

۱- پیکرهٔ آزاد را رسم کرده بجای گشتاور کوپل قرار می دهیم .
۲- عکس العمل تکیه گاهها را بدست می آوریم (تنها در این قسمت می توان بجای بار گسترده معادل متمرکز آن را قرار داد) .
۳- تشخیص مقاطعی که باید بررسی شود



مثال -





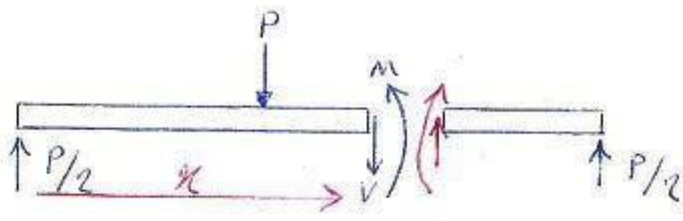
قرار داد

در مقطع اول : $V = P/2$

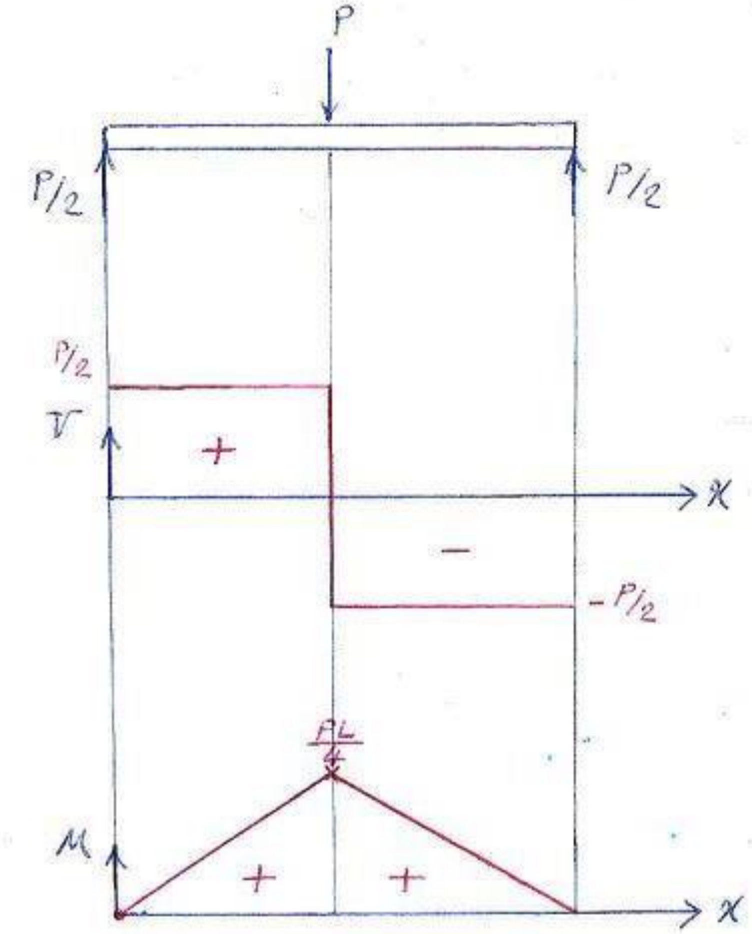
$M - P.x/2 = 0 \;+\!\circlearrowleft \Rightarrow M = P.x/2$

* گشتاور را حول نقطه ای می گیریم که روی مقطع قرار دارد.

در مقطع دوم :



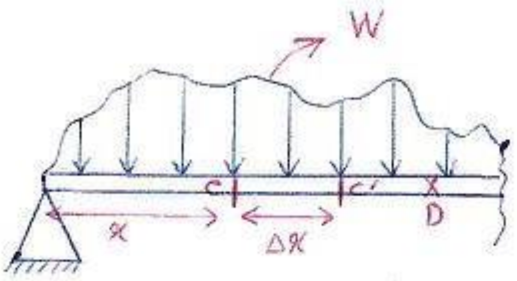
$$\mathrm{II}\ \begin{cases} V = -\dfrac{P}{2} \\ M = P(L-x)/2 \end{cases}$$

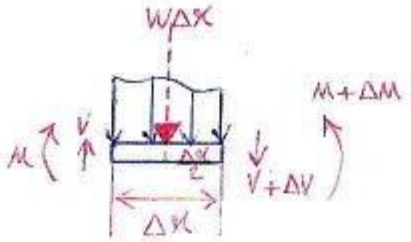


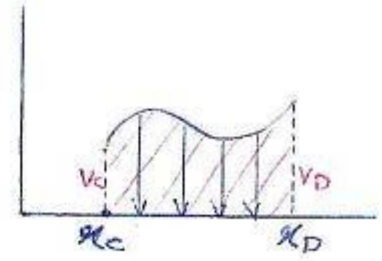
* اگر مقدار برش (+) باشد شیب دیاگرام خمش صعودی است و اگر مقدار برش (-) باشد برعکس.

* رابطه‌ای بین بار گسترده ، نیروی برشی و گشتاور خمشی :

تیری را در نظر می‌گیریم که بار گسترده نا مشخصی که می‌توان آن را فرمول کرد بر آن وارد می‌شود.







مجموع نیروها در جهت قائم : $V-(V+\Delta V) - W\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{-W\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -W$$

* یعنی در هر نقطه شیب دیاگرام نیروی برشی برابر با منفی بار گسترده در همان نقطه است.

* اگر بین نقاط دلخواه C و D انتگرال گرفته شود:

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} W\,dx$$

* یعنی اختلاف نیروی برشی میان دو نقطه برابر است با سطح زیر منحنی بار گسترده بین همان دو نقطه و با علامت مخالف.

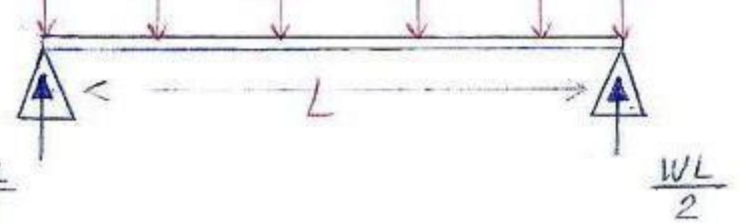
مجموع گشتاورها حول C' : $\sum M_{C'} = 0$

$$(M+\Delta M) - M - V\Delta x + W\Delta x \times \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{V\Delta x}{\Delta x} - \frac{\frac{1}{2} W(\Delta x)^2}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

$$\boxed{M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx}$$

مثال -



کافیست نیروی برشی را در تکیه گاه حدس زده و از فرمول استفاده کنیم .

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx \Rightarrow$$

$$V = V_A - Wx \Rightarrow V = \frac{WL}{2} - Wx$$

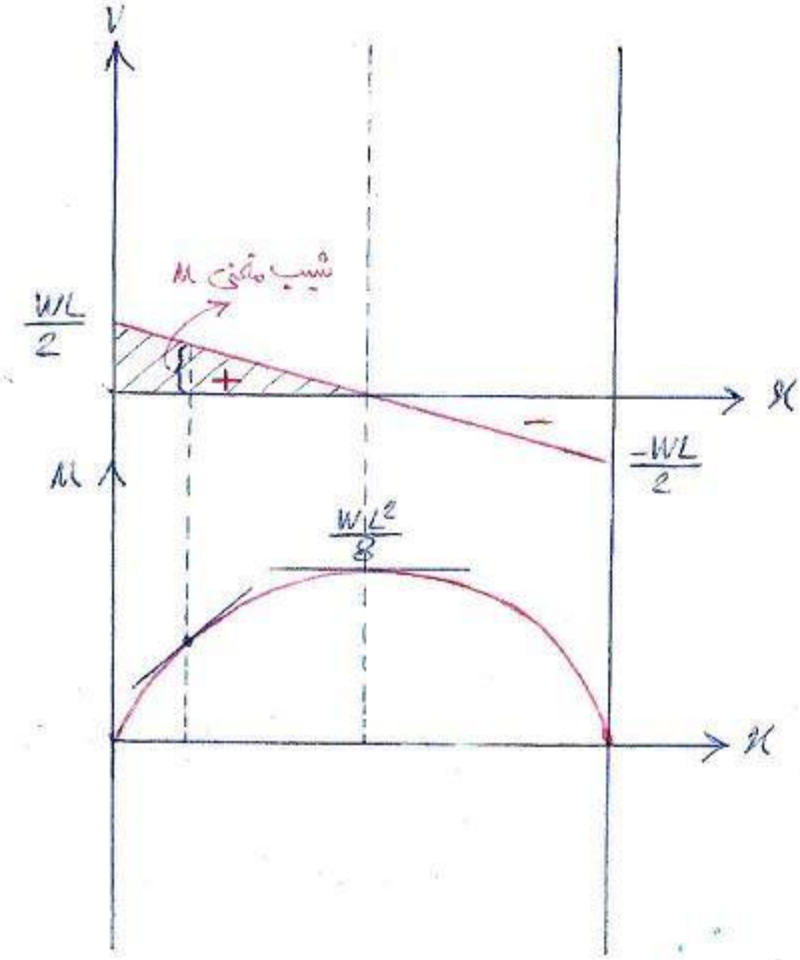
$$\Rightarrow \boxed{V = W\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$ در تمام نقاط تیر بسته به x .

گشتاور هم در تکیه گاه صفر است (چون تکیه گاه درگیر نیست) :

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx = \int_0^x W\left(\frac{L}{2} - x\right) dx \Rightarrow$$

$$\boxed{M = \frac{W}{2}\left(Lx - x^2\right)}$$ معادله یک سهمی

(یک واحد) - (درجه بار گسترده < درجه V < درجه M) -



« نمودارها »

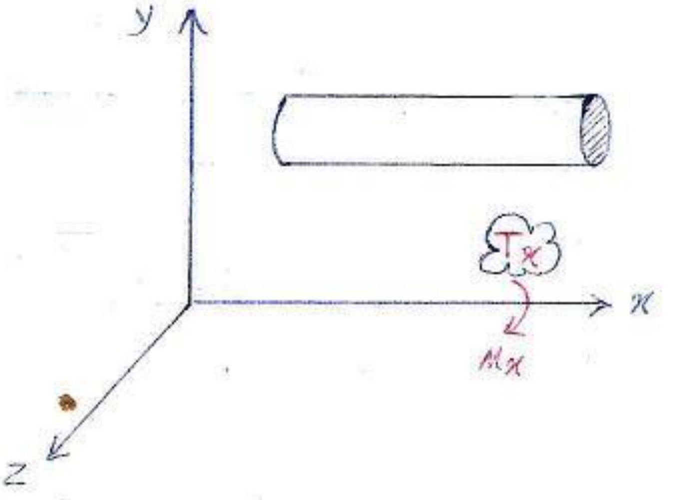
$V>0 \Leftarrow$ شیب M صعودی

$V<0 \Leftarrow$ شیب M نزولی

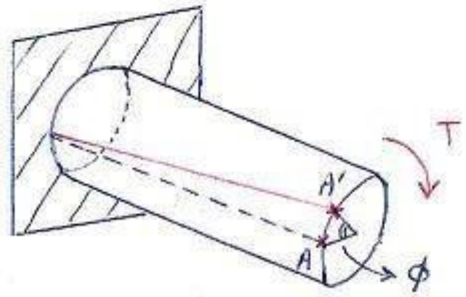
* $M_{x=\frac{L}{2}} = M_{max} = \frac{WL^2}{8}$

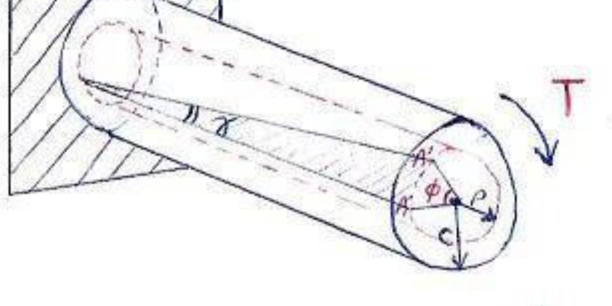
* اگر شیب برش منفی باشد تقعر منحنی M به سمت مقادیر منفی است و اگر شیب برش مثبت باشد برعکس . نسبت بارگسترده به دیاگرام V هم به همین صورت است .

« Torsion » « پیچش »



پیچش مقاطع دایره‌ای : حول محور اصلی جسم (x)





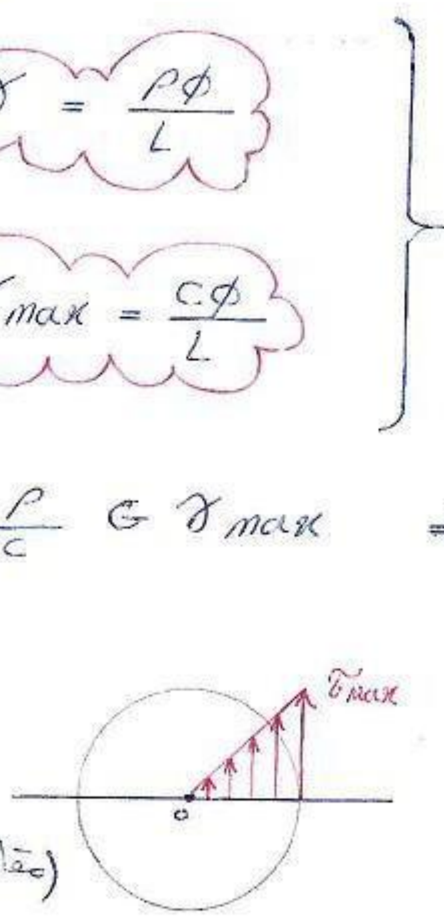
γ - کرنش زاویه‌ای

$* \ \tau = G\gamma$ قانون هوک

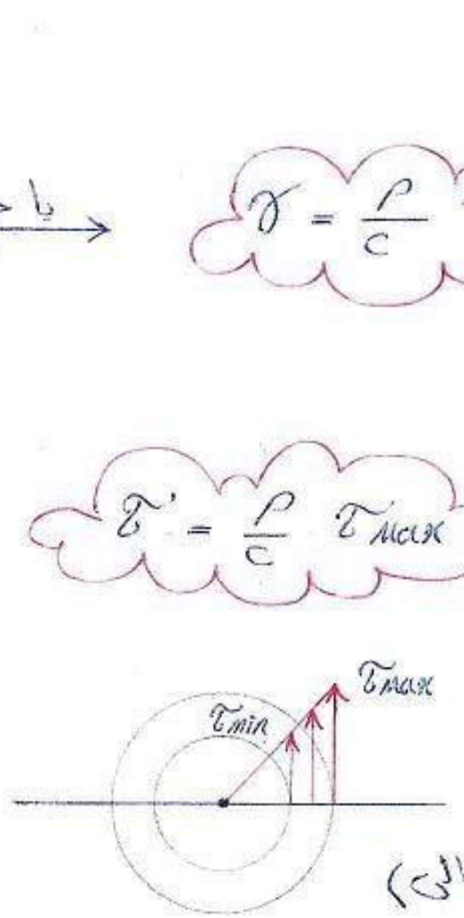
$$\begin{cases} \overset{\frown}{AA'} = \rho\phi \\ \overset{\frown}{AA'} = \gamma L \end{cases} \Rightarrow \quad \rho\phi = \gamma L \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{\rho\phi}{L} \\[2ex] \gamma_{max} = \dfrac{c\phi}{L} \end{array}\right\} \xrightarrow[\phi]{\text{با حذف}} \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

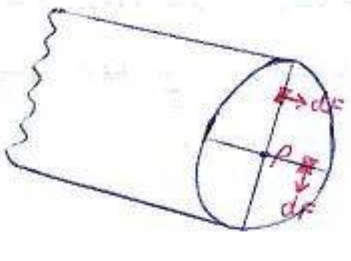
$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{max} \Rightarrow \tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max}$$ رابطه خطی



(مقاطع توپر)



(مقاطع توخالی)



استاتیک : $T = \int \rho \, dF$

$dF = \tau \, dA$

$$\int \rho(\tau \, dA) = T$$

$$\int \rho\left(\frac{\rho}{c}\tau_{max}\right) dA = T$$

$$\frac{\tau_{max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 \, dA}_{\text{(J) ممان قطبی}} = T$$

$\Rightarrow$ چون J برای دایره توپر $\frac{1}{2}\pi c^4$ و برای دایرهٔ توخالی $\frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) \leftarrow$ است ، لذا مسئله تنها شکل هندسی می‌گیرد و لذا :

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J}$$

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

* اگر در دایره توخالی بجای ρ شعاع داخلی را قرار دهیم τ_{min} را می‌دهد و با قرار دادن شعاع خارجی τ_{max} بدست می‌آید.

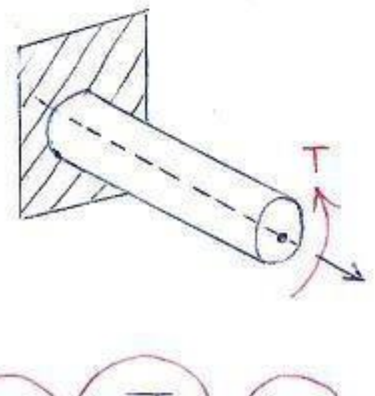
$$\left.\begin{aligned} \gamma_{max} &= \frac{c\phi}{L} \\ \gamma_{max} &= \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{T \cdot c}{J \cdot G} \end{aligned}\right\} \rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ}$$

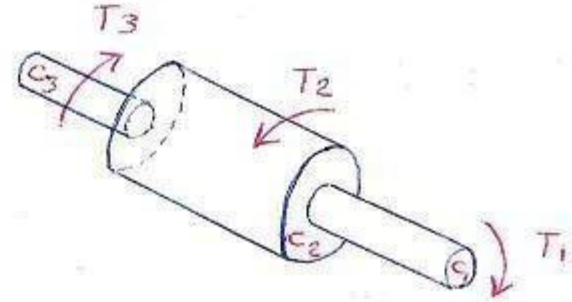
زاویه پیچش

G - مشخصه مقاومت مصالح مقطع .

J - مشخصه هندسی مقطع .

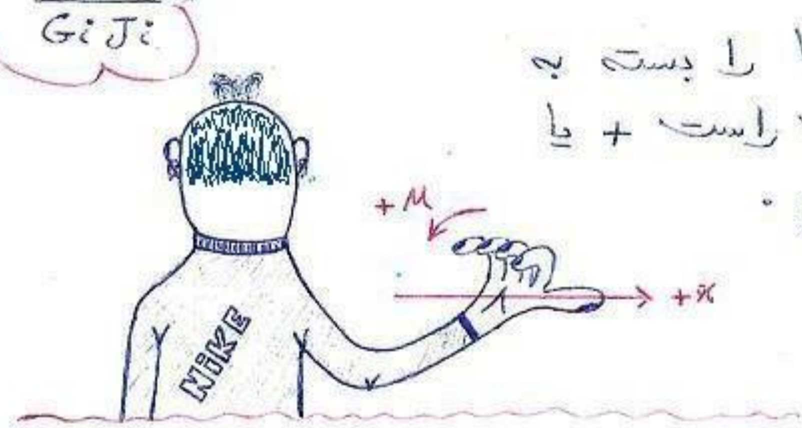
نکته :



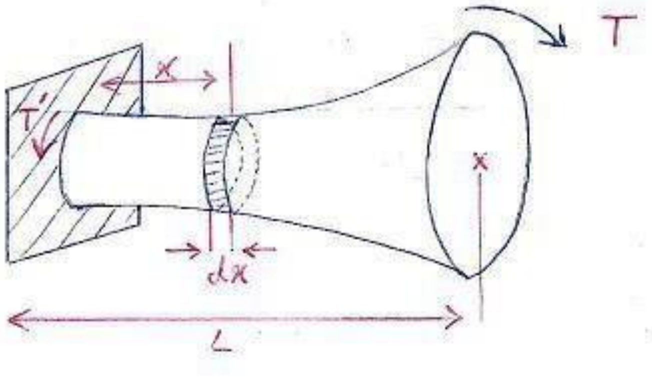


$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

* علامت T ها را بسته به قانون دست راست + یا - می گیریم .

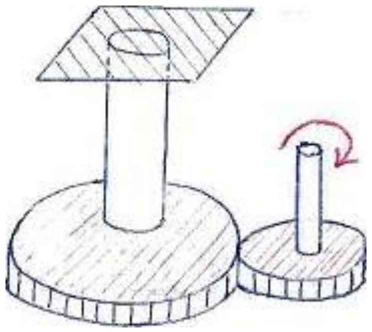


نکته :



$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{J(x)\,G}$$



shafts — محورهای انتقال قدرت :

* توان و دور موتور و نوع جنس محور را داریم (یا قطر محور) لذا می توان مشخصه‌ای از محور را که در طراحی آن لازم است محاسبه نمود.

$$\begin{cases} P = T\omega \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P &= 2\pi f T \\ T &= \frac{P}{2\pi f} \end{aligned}}$$

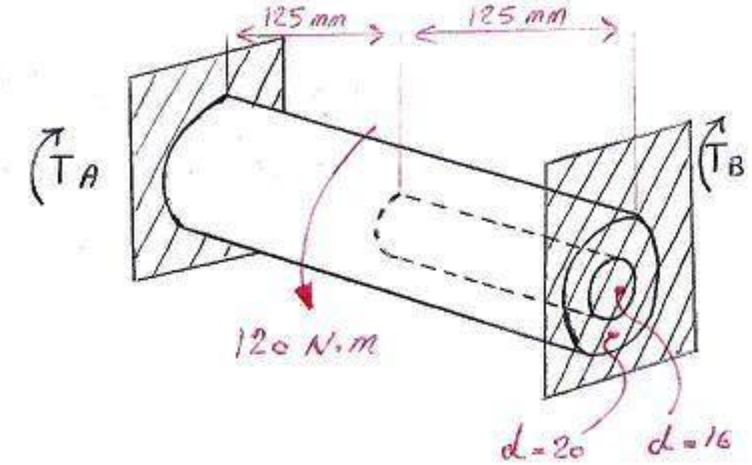
f ـ فرکانس

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J} = \frac{T}{J/c} \rightarrow J/c = \frac{T}{\tau_{max}}$$

$$\underline{\qquad\qquad} \rightarrow$$

نکته: در محورهای توخالی باید J/c_2 را بررسی کنیم زیرا-

مسائل نامعین استاتیکی :



مثال - در دو تکیه گاه A و B گشتاورها را محاسبه کنید .

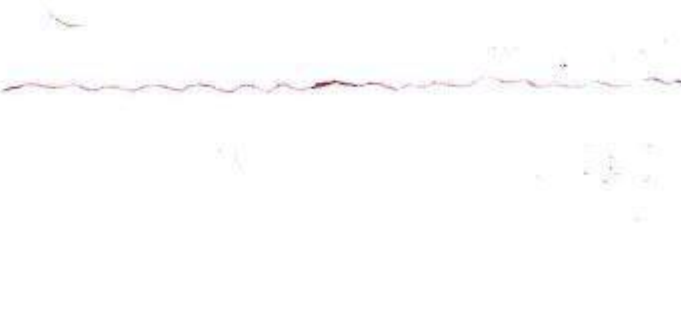
(استاتیک) : $* \; T_A + T_B = 120 \;\; N.m$ ⓘ

$* \; \phi = \phi_1 + \phi_2 = 0 \longrightarrow$

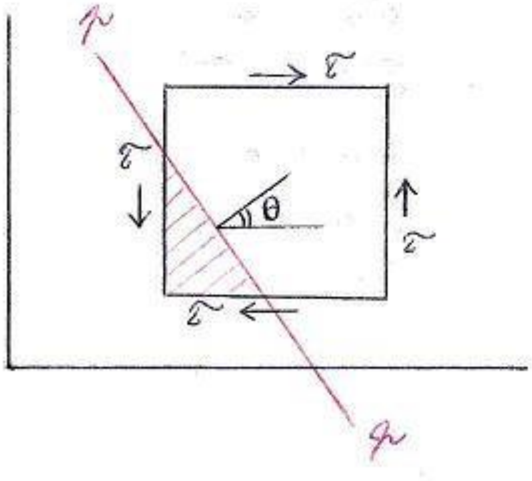
$$\frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \longrightarrow \quad * \; T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A \quad (II)$$

$$L_1 = L_2 = 125 \; mm \longrightarrow \quad T_A = 75.5 \; N.m \quad T_B = 44.5 \; N.m$$

المانهای چرخیده :

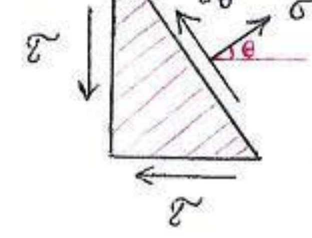


اگر المان موازی سطح مقطع باشد فقط تنش برشی روی آن پدید می آید و اگر المان از حالت موازی منحرف شود - تنش نرمال هم پدید می آید.

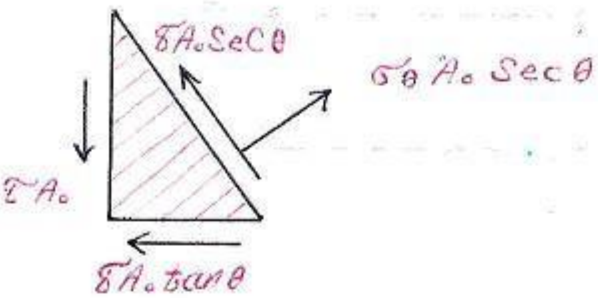


* زاویه هر صفحه همواره زاویه آن با سطح افق است.

* المان نشان داده شده یک بعد سوم هم دارد.



نیروها :



جمع نیروها در جهت σ_θ : $\sigma_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \sin\theta + \tau A_0 \tan\theta \cos\theta$

$$\rightarrow \quad * \ \sigma_\theta = 2\tau \sin\theta \cos\theta$$

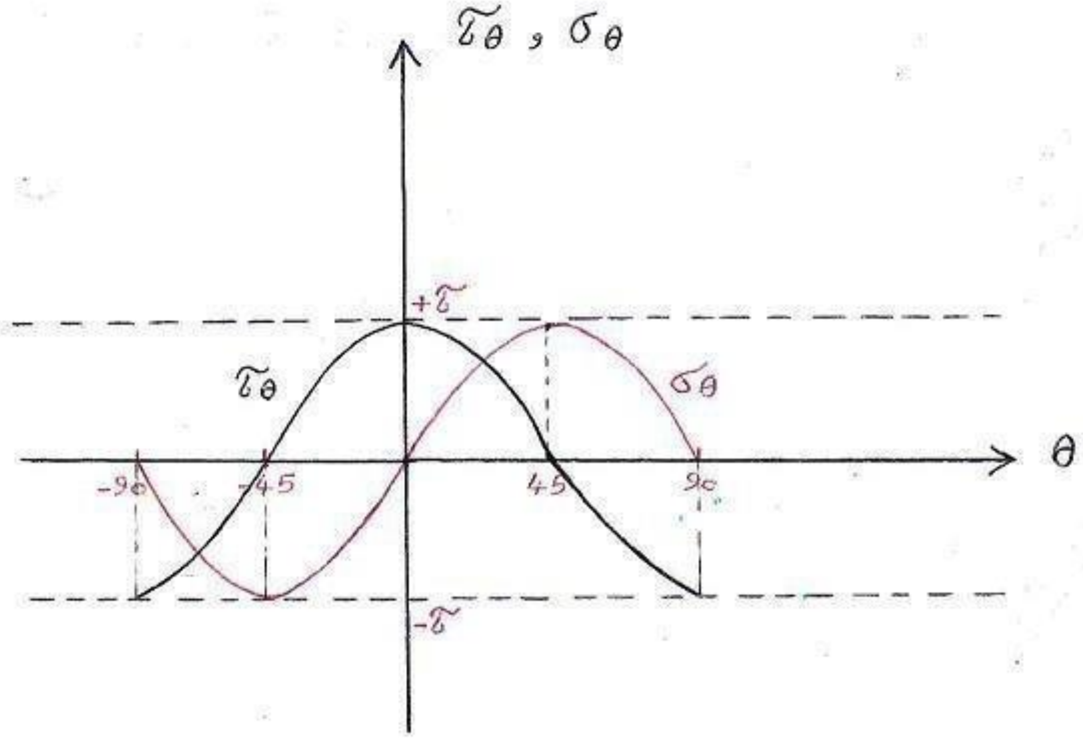
جمع نیروها در جهت τ_θ : $\tau_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \cos\theta - \tau A_0 \tan\theta \sin\theta$

$$* \ \tau_\theta = \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta$$
$$\tau_\theta = \tau \cos 2\theta$$

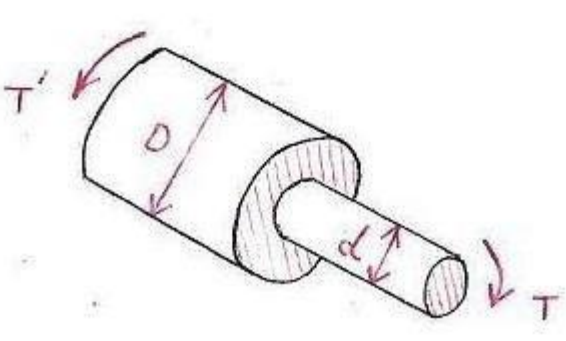
بحث -

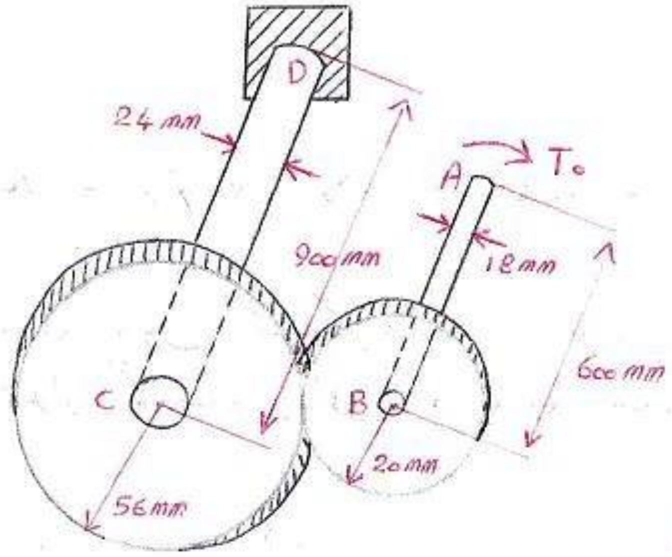
$$\begin{cases} \theta = 0 \rightarrow & \sigma_\theta = 0 & \tau_\theta = \tau \\ \theta = 90^\circ \rightarrow & \sigma_\theta = 0 & \tau_\theta = -\tau \\ \theta = 45^\circ \rightarrow & \sigma_\theta = \tau & \tau_\theta = 0 \\ \theta = -45^\circ \rightarrow & \sigma_\theta = -\tau & \tau_\theta = 0 \end{cases}$$



نکته - K - ضریب تمرکز تنش برای گذر از ناحیه خطرناک.

$$\tau = K \frac{T.C}{J}$$





مثال -

1- حداکثر T_o چقدر ؟

2- زاویه پیچش A ؟

$$\begin{cases} G = 80 \text{ GPa} \\ \tau_{all} = 55 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$T_{CD} = \frac{56}{20} T_o \rightarrow (T_{CD} = 2.8\, T_o)$$

$$\tau = \frac{T_o C}{J} \rightarrow 55 \text{ MPa} = \frac{T_o(0.009)}{\frac{1}{2}\pi(0.009)^4} \rightarrow$$

$T_o = 63 \text{ N.m}$ I   در محور AB :

در محور CD : $\tau = \dfrac{T_{CD} \cdot C}{J} \rightarrow$

$$55 \text{ MPa} = \frac{2.8\, T_o\,(0.012)}{\frac{1}{2}\pi(0.012)^4} \rightarrow T_o = 53.3 \text{ N.m} \quad \text{II}$$

$(\text{I}, \text{II}) \rightarrow * \; T_o = 53.3 \text{ N.m}$ قابل قبول

در محور AB : $\phi_{A/B} = \dfrac{T_{AB} \cdot L}{G \cdot J} = \dfrac{53.3 \times 0.6}{80 \text{ GPa} \times \frac{\pi}{2}(0.009)^4}$

$$\phi_{A/B} = 0.03 \text{ Rad} = 2.22°$$

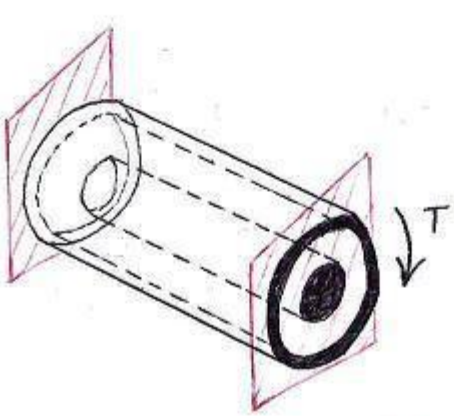
در محور CD : $\phi_{C/D} = \dfrac{T_{CD} \cdot L}{G \cdot J} = \dfrac{2.8 \times 53.3 \times 0.9}{80 \text{ GPa} \times \frac{\pi}{2}(0.012)^4}$

$$\phi_{C/D} = 0.0515 \text{ Rad} = 2.95°$$

$$\phi_A = 2.8 \times 2.95 + 2.22 \quad \Rightarrow \quad * \ \phi_A = 10.48^\circ$$

** تعداد دور کوچکتره به نسبت قطرها بیشتر است.

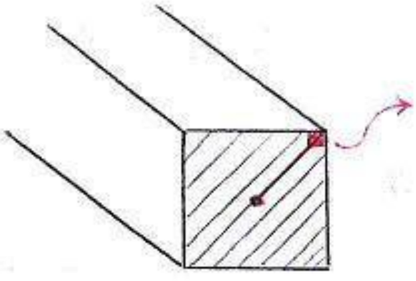
** مقدار گشتاور کوچکتره به نسبت قطرها کمتر است.



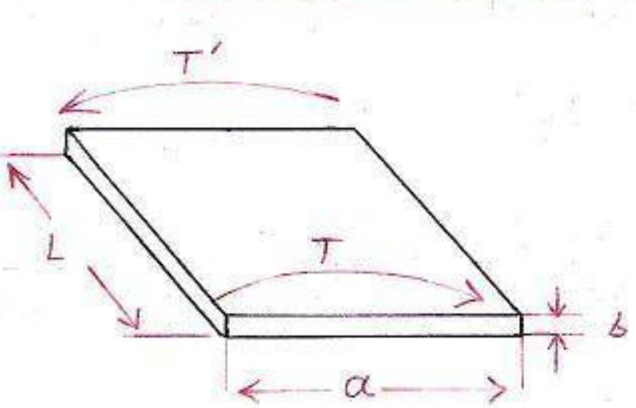
مثال- لوله و میل گرد هر یک چه مقدار گشتاور را انتقال می دهند؟

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = T \\ \phi_1 = \phi_2 \end{cases}$$

« مقاطع غیر دایره‌ای » :



* تنش در دورترین شعاع صفر است (برعکس مقاطع دایره‌ای شکل)

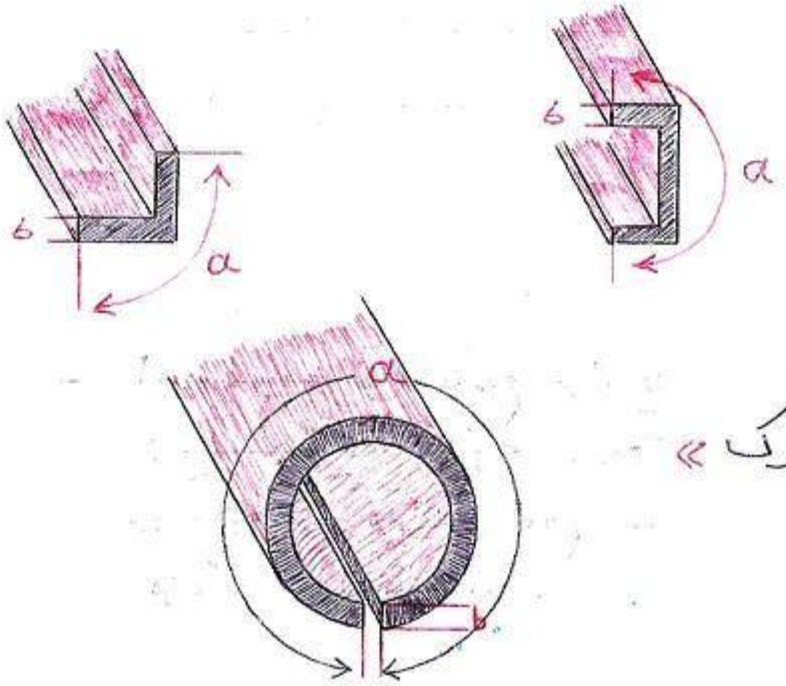


$$* \ \tau_{max} = \frac{T}{C_1 a b^2}$$

$$* \ \phi = \frac{TL}{C_2 a b^3 G}$$

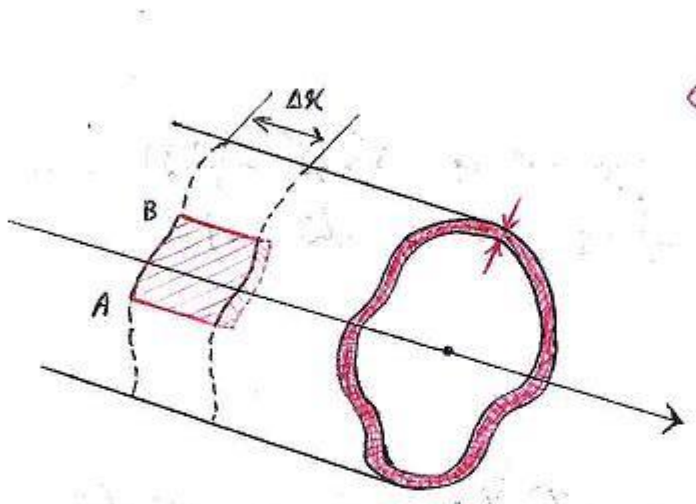
a/b	c_1	c_2
⋮	⋮	⋮

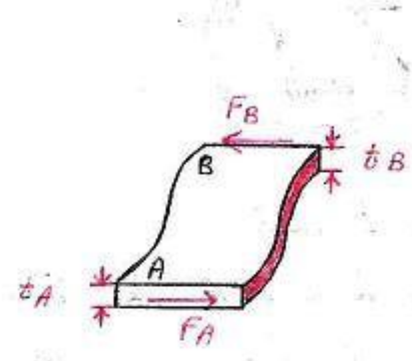
* اگر a نسبت به b خیلی بزرگ شود (مثلاً $50mm$ به $3mm$) - ۳ نگاه $C_1 = C_2 = 0.333$ و می توان مقاطعی به شکل نبشی یا - ناودان یا دایره ای کامل را با همین فرمولها حل کنیم.



« مقاطع باز جدار نازک »

« محورهای توخالی جدار نازک »





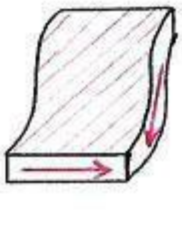
$$F_A - F_B = 0 \longrightarrow F_A = F_B$$

$$\left.\begin{aligned} F_A &= \tau_A \cdot t_A \, \Delta x \\ F_B &= \tau_B \cdot t_B \, \Delta x \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad (\tau_A \, t_A = \tau_B \, t_B)$$

چون A و B نقاط دلخواهی هستند لذا :

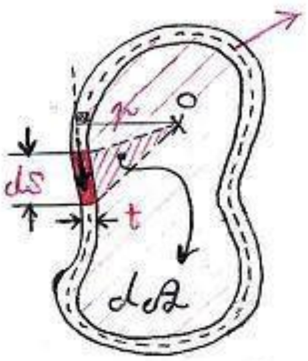
$\tau . t = Const \rightarrow$

$q = \tau . t$ (shear flow)
جریان برش



* این دو برش باهم برابرند زیرا در یک المان برروی دو وجه قرار دارند و به هم نزدیک می شوند .

نکته - « dA روی این منحنی بسته تعریف می شود . »



** المان کوچک به ضخامت t و طول ds در نظر می گیریم .

$$* \quad dA = t\, ds$$
$$dF = \tau . dA = \tau . (t\, ds) = (\tau . t)\, ds = q\, ds$$
$$dM_o = r\, dF = r\,(q\, ds) = q\,\underbrace{(r\, ds)}_{2\, d\mathcal{A}} = 2q\, d\mathcal{A}$$

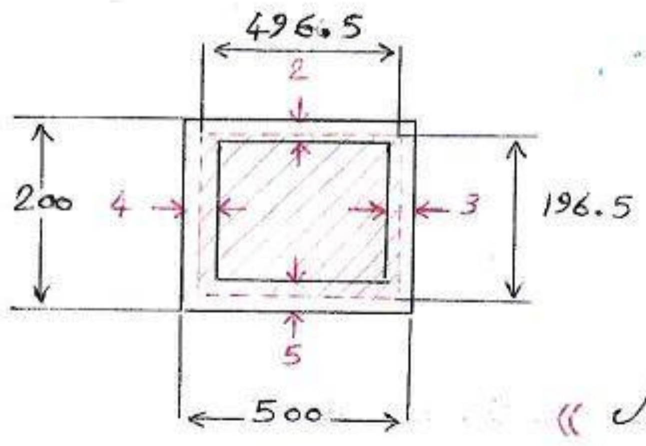
$$T = \oint dM_0 = \oint 2q\, dA = 2qA$$

$$\left.\begin{aligned} T &= 2qA \\ q &= \tau \cdot t \\ T &= 2\tau t A \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{T}{2tA}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t}}$$

* زاویه پیچش در محورهای - توخالی جدار نازک

مثال -



« $A = 496.5 \times 196.5$ »

مثال - « از محورهای انتقال قدرت »

$$\begin{cases} \text{قدرت} = 5\ hp \\ \text{دور} = 3600\ rpm \\ \tau_{all} = 8500\ psi \end{cases}$$

* روتور این موتور چقدر باید طراحی شود؟

= .S x dٓ oo = âd oco in lb/s

$T = \frac{P}{\quad}$ 33 000 = 87.54 lb in

$\tau = \frac{T \cdot c}{\quad}$ $\frac{T}{J/c}$ * $J/c = \frac{T}{\tau_{all}} = \frac{87.54}{85} = 10.3 \times 10^{-3}$

→ in

باقطر خارجي 50 mm

$P = 100$ KW

$f = 20$ Hz

$\tau_{all} = 60$ MPa

ضخامت لوله = ?

$T \; \frac{P}{2\pi f}$ 795.8 N.m

$\tau = \frac{T C_2}{\quad}$ $\xrightarrow[20]{10^3}$ $J/C_2 = \frac{T}{\quad} = \frac{795.8}{\quad}$

13.26×10^{-6} m

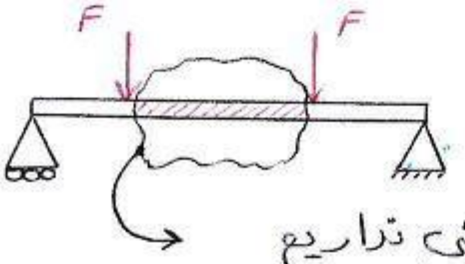
$J/C_2 \; \frac{J}{25 \times 10^{-3}} = \frac{\frac{1}{2}\pi \left((25 \times 10^{-3})^4 - C_1^4\right)}{25 \times 10^{-3}} = 13.26 \times 10^{-6}$

→ ضخامت = $C_2 - C_1$

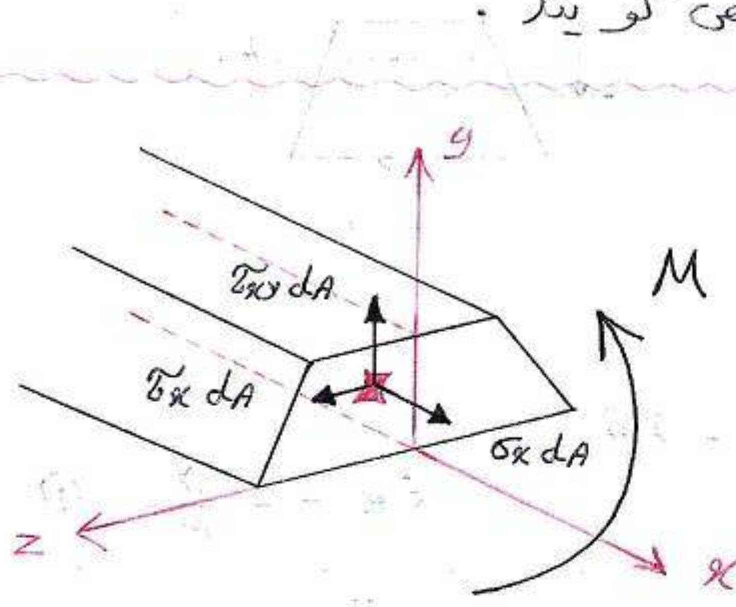
« Pure Bending » « خمش »

« خمش خالص »

1 - قطعه دارای صفحه تقارن است.
2 - گشتاور خمشی در این صفحه تقارن قرار دارد.
3 - شکل قطعه در سرتاسر آن منشوری و یکنواخت است.
4 - جنس قطعه همگن و یکنواخت است.



* در این ناحیه نیروی برشی نداریم و تنها گشتاور خمشی داریم که آن را گشتاور خمشی خالص گویند.

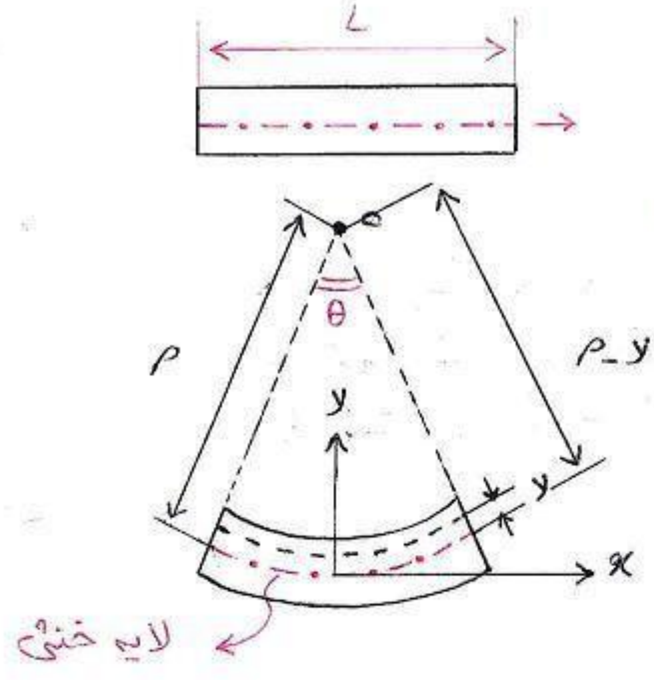


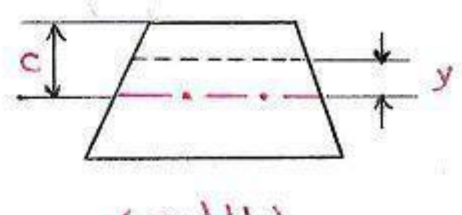
$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\Sigma M_y = 0 \longrightarrow \int z \, \sigma_x \, dA = 0$$

$$\Sigma M_z = 0 \longrightarrow \int -y \, \sigma_x \, dA = M$$

* یعنی هم تنش کششی داریم وهم تنش فشاری .





$$\delta = L' - L$$

$$\delta = (\rho - y)\,\theta - \rho\theta = -y\theta$$

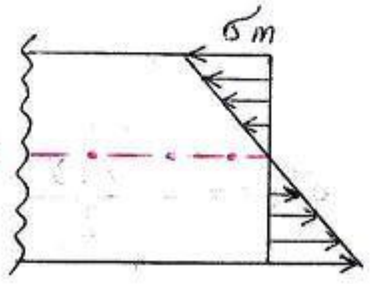
$$\varepsilon_x = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \longrightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (1)$$

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \xrightarrow{(1)} \varepsilon_x = -\frac{y}{c}\,\varepsilon_m$$

* یعنی در تار خنثی کرنش صفر است ، بالای آن کاهش طول و در زیر آن افزایش طول داریم .

$$E\varepsilon_x = -\frac{y}{c} E\varepsilon_m \longrightarrow$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m$$



محل تار خنثی :

$$* \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = 0$$

$$-\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0 \xrightarrow{\frac{\sigma_m}{c} \neq 0} \int y \, dA = 0$$

ممان اول سطح نسبت به محور x

اگر $\int y\, dA = 0$ باشد باید محور x از مرکز سطح بگذرد و چون محور x همان (تار خنثی) است پس موقعیت تار خنثی بدین گونه است که از مرکز سطح می گذرد .

مقدار تنش قائم :

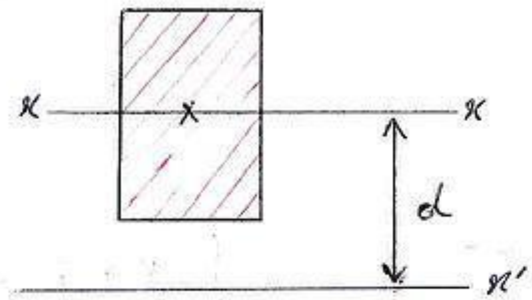
$$\int -y\,\sigma_x\,dA = M$$

$$\int -y\left(-\frac{y}{c}\,\sigma_m\right) dA = M$$

$$\frac{\sigma_m}{c}\int \underbrace{y^2\,dA}_{\text{ممان اینرسی سطح مقطع}} = M$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{Mc}{I}} \qquad \boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$

قضیه انتقال :



$$\begin{cases} I_{xx} = \dfrac{bh^3}{12} \\ I_{x'x'} = \dfrac{bh^3}{12} + Ad^2 \end{cases}$$

نکته -

$$* \quad \sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{\underbrace{I/c}_{\text{مدول مقطع } S}}$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{M}{S}}$$

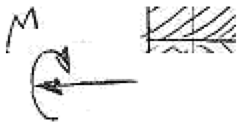
* در طراحی اجزاء تحت خمش سعی ما افزایش ممان اینرسی است.

شعاع ρ :

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \longrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} \quad \longrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$



$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$ $\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$

المان مانند dA را در ناحیه 1 و 2 در نظر می گیریم نیروهای وارد بر المان برابر است با:

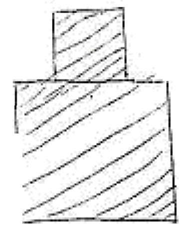
$$dF_1 = \sigma_1 \, dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA$$
$$dF_2 = \sigma_2 \, dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \xrightarrow{\frac{E_2}{E_1} = n} -n \frac{E_1 y}{\rho} dA$$

وقتی نیرو n برابر باشد پس تنش نیز n برابر می شود. پس برای بدست آوردن تنش برابر سطح را n برابر فرض می کنیم پس برای این n سطح را از یک جنس بتوان فرض کرد باید:

در اینجا می n را در بار و حجم تشکیل شده است مدولهای الاستیسیته را محاسبه کرده سطح یکی را در n ضرب می کنیم تا سطح مقطع معادل بدست آید (سطح را طوری افزایش می دهیم n ارتفاع یا همان y افزایش نیابد) مانند شکل:

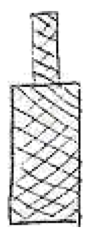
1

الف) $\frac{E_2}{E_1} = n$



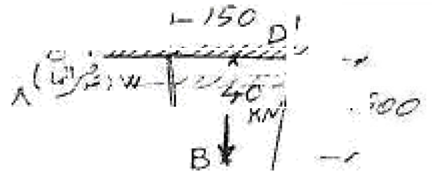
ب) $\frac{E_1}{E_2} = n$

qb



تبصره: اگر تنش را در ناحیه تغییر یافته محاسبه شده باشد، جواب حاصل را باید دوباره دیگر ضرب در n کرد تا عدد واقعی بدست آید در غیر این صورت همان عدد جواب است.

)



مثال) قطعه از ورق با ضخامت 25mm بریده شده

(فصل بارگذاری محوری)

$E = 200\ GPa$

(از نیروی وزن صرفنظر شده)

$\delta_A = ?$

تنها متغیر سطح مقطع است چون وزن ثابت است

فرض کنیم

1500 (از تشابه) !

از تشابه مثلث: $\frac{50}{} = \frac{AC}{}$ ⟶ $W = \frac{1}{}x$

می‌دانیم: $A = W \times 25$

۳۶ ⟶ $\boxed{A = \frac{5}{6}x}$

$\frac{2}{6}x$ 200 GPa

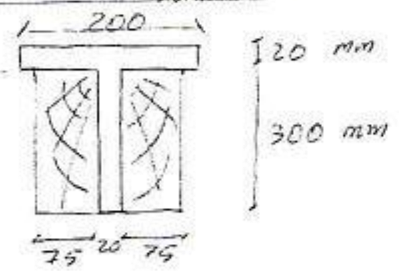
* حدود انتگرال از 3000 تا 4500 می‌باشد زیرا اگر مبدأ را C فرض کنیم نقطه B در 3000 قرار دارد و چون اختلاف طول فقط در محدوده B تا D است پس حدود در همین فاصله تغییر می‌کند.

کنیم

Composite

جسم

مثال)



$E_w = 12.5\ GPa$

$E_s = 200\ GPa$

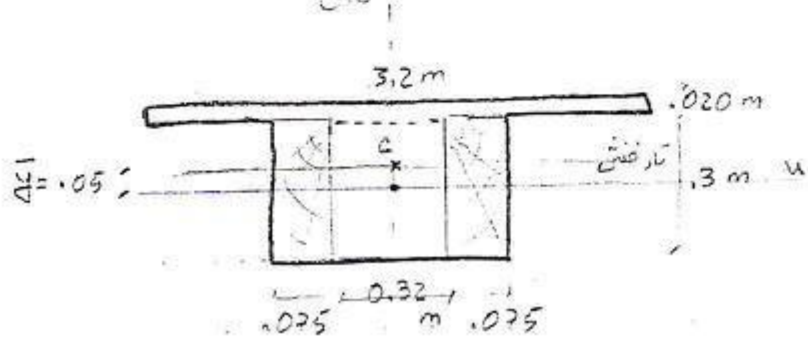
$M = 50\ kNm$

؟ = حداکثر تنش در چوب

؟ = تنش در لبه بالائی تسمه فولادی

باید فولادها به چوب تبدیل کرد یعنی فولادها را معادل چوب کرد.

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200}{12.5} = 16$$



حال می توان کل سطح را با مواد یکنواخت شده از چوب با فرض بودن یکپارچه فرض می کنیم.

برای راحتی محاسبات روی محور u محاسبه می کنیم.

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(.16)(3.2\times.02)+0}{3.2\times.02+.47\times.3} = .050\,m$$

$$I = \frac{1}{12}(.47)(.3)^3 + (.47\times.3)(.05)^2 + \frac{1}{12}(3.2)(.02)^3 + (3.2\times.02)(.16-.05)^2$$

$$\Longrightarrow \underline{I = 2.19\times10^{-3}\ m^4}$$

حداکثر تنش در لبه پائین چوب اتفاق می افتد چون بیشترین فاصله را تا تار خنثی دارد.

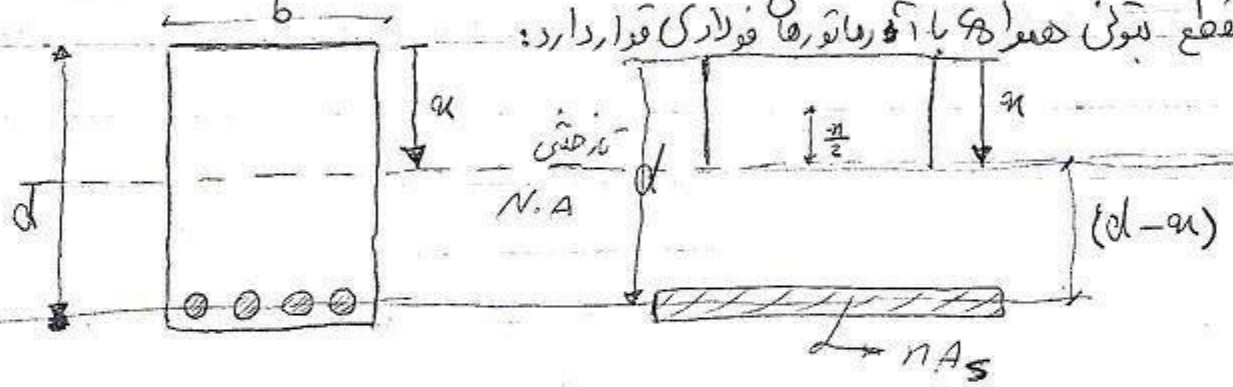
$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{50\times10^3\times.2}{2.19\times10^{-3}} \rightarrow \sigma_w = 4.57\ MPa$$

$$\sigma_s = n\frac{Mc_1}{I} = 16\times\frac{50\times10^3\times.120}{2.19\times10^{-3}} \rightarrow \sigma_s = 43.8\ MPa$$

تبصره I: افزایش سطح فقط به موازات تار خنثی صورت می گیرد و ارتفاع تغییر نمی کند.

تبصره II: کاربرد اصلی این مبحث در تیرهای بتنی است.

فرض کنیم یک مقطع بتنی همراه با آرماتورهای فولادی قرار دارد:



$n = \frac{E_s}{E_c}$ بتن

$A_s =$ تعداد میلگرد × سطح مقطع هر میلگرد

هدف در ابتدا محاسبهٔ x یعنی فاصلهٔ تار خنثی می باشد:

ممان بالائی $= (b \times x) \times \frac{x}{2}$

ممان پائینی $= n(A_s(d-x))$

$\longrightarrow (b\times x)\times\frac{x}{2} - nA_s(d-x) = 0$

$\longrightarrow \frac{1}{2}bx^2 - nA_s x - nA_s d = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$ همواره یکی از xها غیرقابل قبول است.

برای پیدا کردن مقطع معادل در چنین مثالی از $\frac{bh^3}{12}$ به علت کوچکی در آرماتورها صرفنظر شده فقط $\sum Ad^2$ را محاسبه می کنیم.

تبصره I: در قسمت پائین چون جسم در حال کشش است و بتون مقاومت کششی در مقابل میلگرد ندارد، از بتون صرفنظر می کنیم.

تبصره II: اگر در مقطع تغییر ناگهانی در راستا باشیم:

$\sigma = K\frac{My}{I}$

ضریب تمرکز تنش $\leftarrow K$

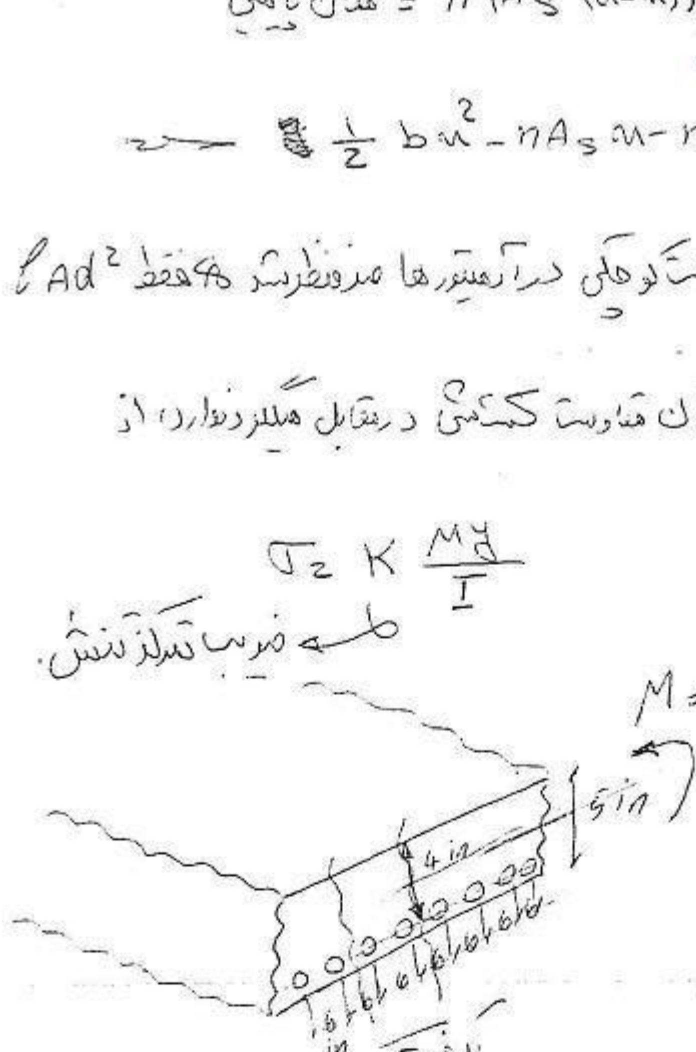
(برای هر یک فوت از عرض) $M = 35\ KIP\cdot in$

مثال) میلگردهای فولادی قطر $\frac{7}{8}$

$E_c = 3\times10^6\ PSI$

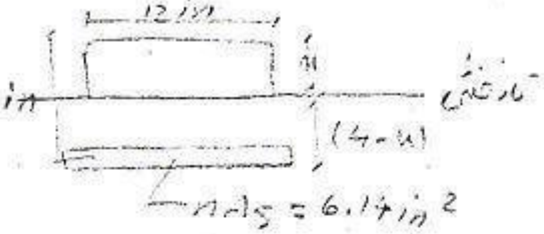
$E_s = 30\times10^6\ PSI$

سؤال: حداکثر تنش در بتون؟ و تنش در فولاد؟



مقاومت مصالح

برای محاسبه در فاصله یک فوت x در این مثال دو تا میلگرد ۵# باعث می‌شود محاسبات را انجام می‌دهیم.



$$A_s = 2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^2\right] = 0.614\ in^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 10 \Rightarrow nA_s = 6.14$$

$$12x\left(\frac{x}{2}\right) - (6.14)(4-x) = 0 \Rightarrow x = 1.575\ in$$

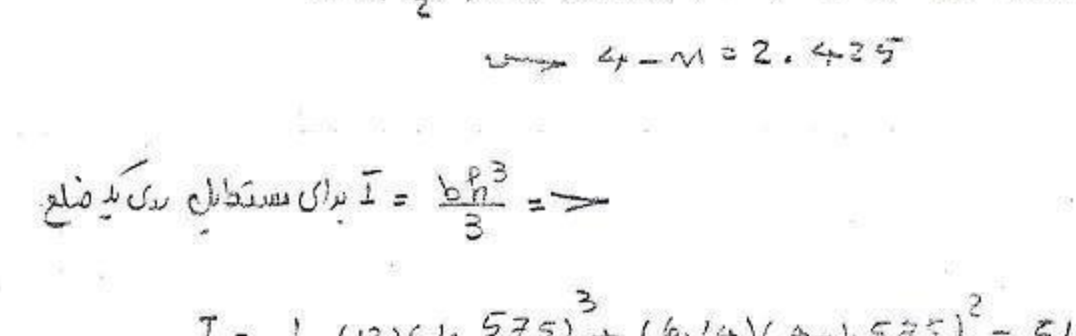
$$\Rightarrow 4 - x = 2.425$$

$I = \frac{bh^3}{3}$ برای مستطیل روی یک ضلع $\Rightarrow$

$$I = \frac{1}{3}(12)(1.575)^3 + (6.14)(4-1.575)^2 = 51.7\ in^4$$

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{35 \times 1.575}{51.7\ in^4} \Rightarrow \sigma_c = 1.066\ KSI$$ جواب قسمت I

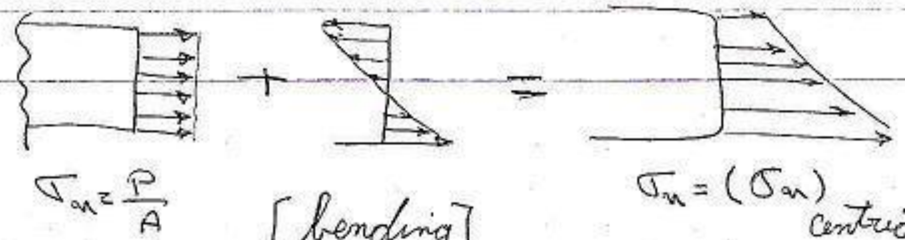
$$\sigma_s = n\frac{Mc_2}{I} = 10 \times \frac{35 \times 2.425}{51.7} \Rightarrow \sigma_s = 16.42\ KSI$$ II " "



مقدار M بستگی به فاصله d دارد.

طریقه محاسبه:

طبق اصل سوپرپوزیشن:



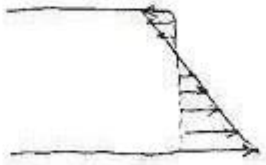
$\sigma_x = \frac{P}{A}$ محوری (Centric)

[bending] $\sigma_x = -\frac{My}{I}$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending}$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

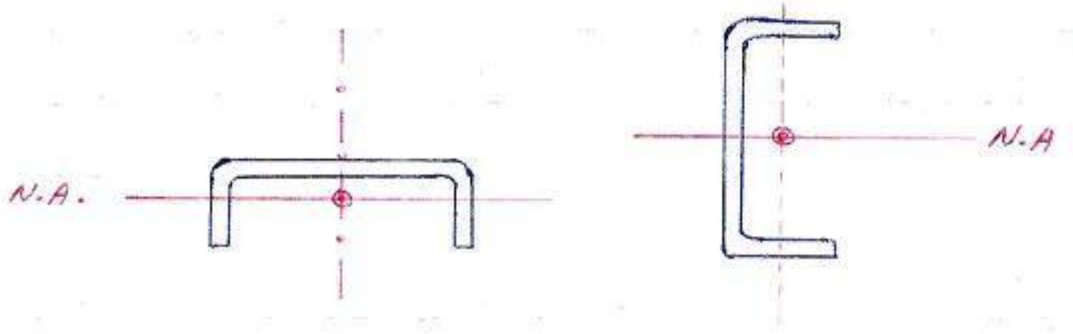
تبصره: ممکن است قسمت منفی در قسمت دوم بر مثبت غلبه کرده و شکل بصورت زیر باشد،



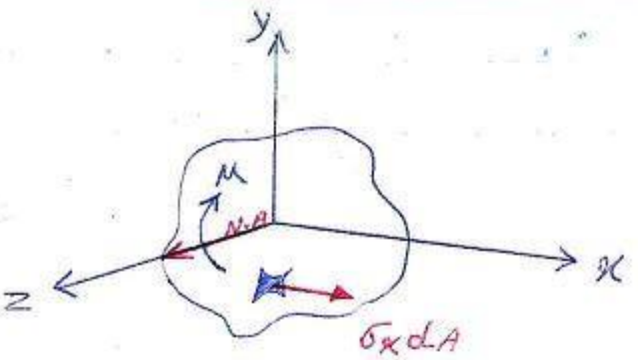
موقعیت تار خنثی با قرار دادن فرمول بالا برابر صفر بدست می آید.

اگر جسم دارای صفحه تقارن نباشد (یا)
گشتاور در صفحه تقارن قرار نگیرد :

* مثلاً در صنعت ناودانها را مایل قرار می دهند (تا فاصله جرم تا مرکز سطح افزایش یابد) که در این حالت گشتاور دیگر در صفحه تقارن قرار نمی گیرد .



* فرض می کنیم تار خنثی بر محور z ها قرار داشته باشد ؛ و بردار N.A و گشتاور برهم منطبق باشند :



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int \sigma_x \, dA = 0 \qquad ①$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \int z \, \sigma_x \, dA = 0 \qquad ②$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \int (-y \, \sigma_x \, dA) = M \qquad ③$$

$$\sigma_x = -\sigma_m \frac{y}{c} \quad , \quad ② \rightarrow$$

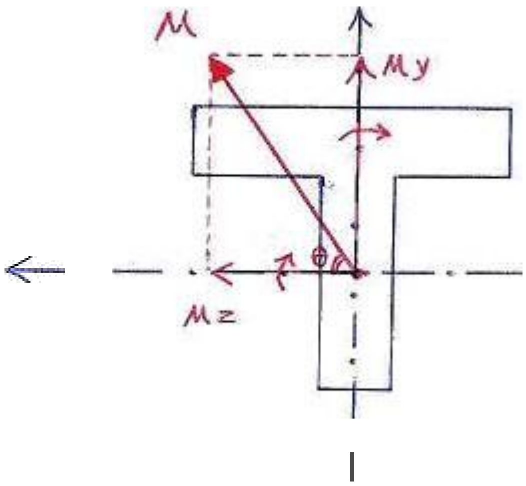
* همان حاصلضرب وقتی صفر می شود که محوری که می خواهیم حول آن
این ممان را بگیریم محور اصلی باشد. مثلاً برای مقاطع متقارن -
همان محورهای تقارن می شوند محور اصلی و اگر یک محور تقارن داشت

است.

غیر متقارن بود

* برای حل مسائل بردار گشتاور را بر روی z و y تصویر می کنیم
و در هر حالت محاسبه می نماییم و سپس اصل superposition
نتایج را باهم جمع می کنیم

یک



$$M_y = M \sin\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_x \quad + \quad \dfrac{M_y Z}{I_y} \\ \sigma_x = \quad \dfrac{}{I=} \end{cases}$$

چون M مثبت که برای z های منفی کششی است $(+)$

موقعیت

$$\frac{M_y Z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \rightarrow$$

$$y \quad \left(\frac{I_z}{I_y} \quad \frac{M_y}{M_z} \right) z$$

$$\boxed{y = \tan\varphi \; z}$$

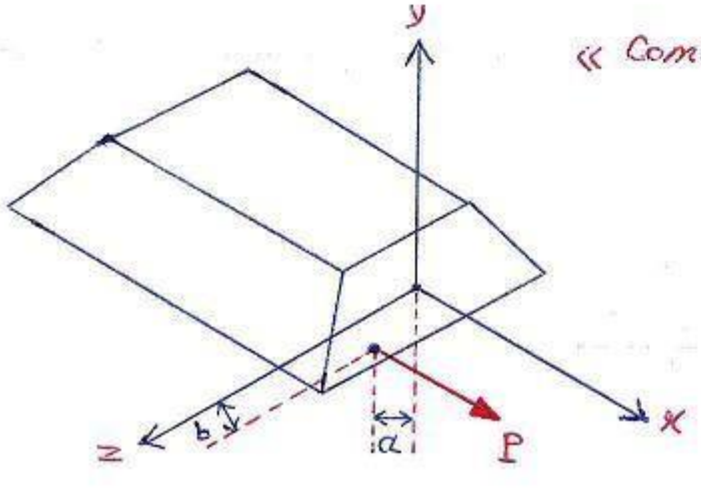
φ زاویه تار خنثی است

که اگر I_z از I_y بزرگتر باشد

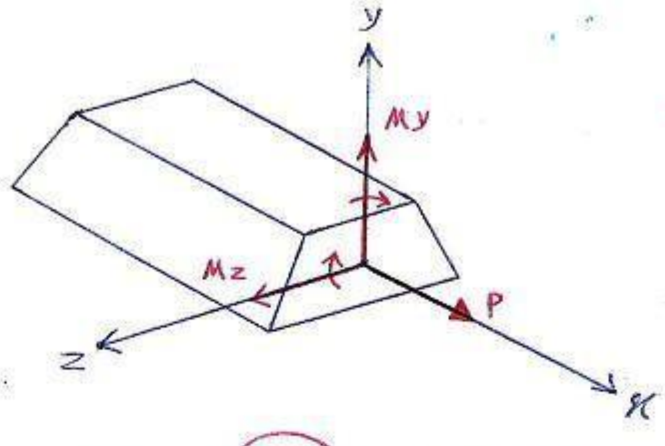
$\theta < \varphi$ است و تار خنثی بالای بردار گشتاور قرار می گیرد و اگر I_z از I_y کوچکتر باشد بر عکس. چون I_z و I_y مثبت هستند لذا $\tan\theta$ و $\tan\varphi$ هم علامتند و لذا تار خنثی و بردار گشتاور همواره در یک ربع قرار می گیرند.

* به عبارتی آن محوری که ممان اینرسی اش قوی تراست تارخنثی را از خود دور می کند.

تنش مرکب « Combined stress »



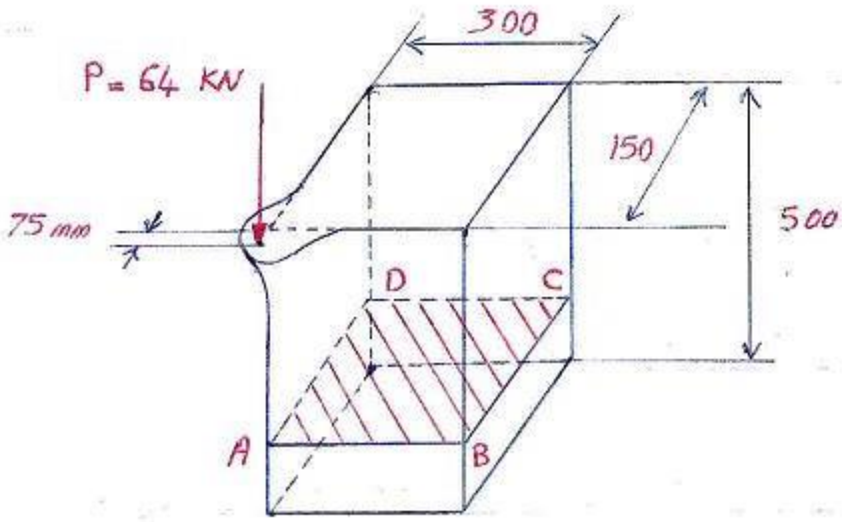
* اگر نیروی P در مرکز سطح وارد نشود دو تا گشتاور هم بوجود می آورد پس سه عامل داریم که تولید تنش می کنند که هر سه تنش نرمال است.



$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y Z}{I_y}$$

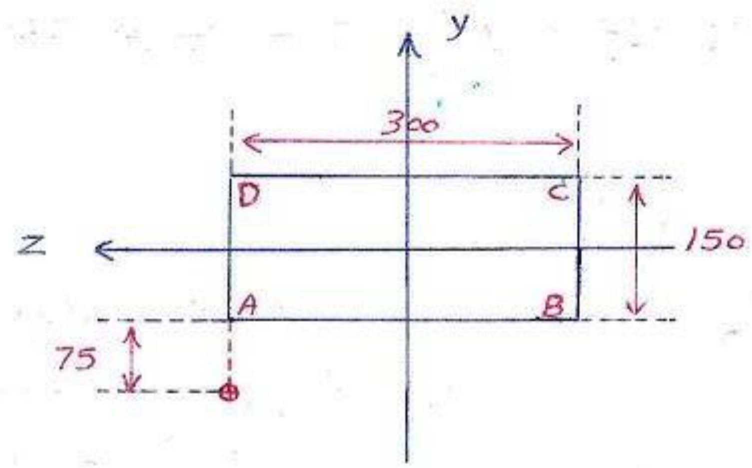
* در امتحان پایان ترم حتماً از این قسمت سؤالی خواهد آمد که در آن هر ۶ حالت تنش موجود باشد.

مثال -



مطلوبست : a) توزیع تنش در مقطع ABCD

b) موقعیت تار خنثی در مقطع فوق



$P = -64 \ KN$

$M_y = -64 \times 0.15 = -9.6 \ KNm$

$M_z = -64 \times (0.075 + 0.075) = -9.6 \ KNm$

$A = (0.15)(0.3) = 0.045 \ m^2$

$S_y = 2.25 \times 10^{-3} \ m^3$

$S_z = 1.125 \times 10^{-3} \ m^3$

$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{S}$

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M_z}{S_z} \mp \frac{M_y}{S_y} \Longrightarrow$$

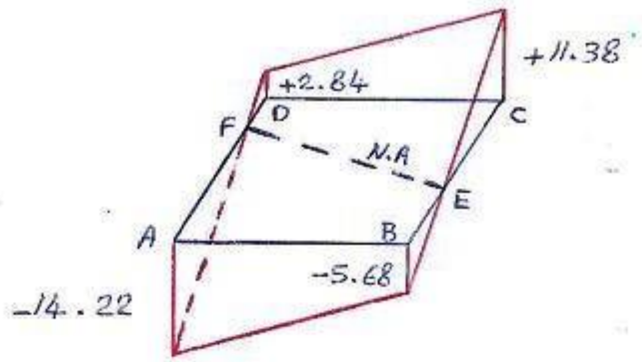
$$\sigma = \frac{-64}{45 \times 10^{-3}} \pm \frac{9.6}{1.125 \times 10^{-3}} \mp \frac{9.6}{2.25 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = (-1.42 \pm 8.53 \mp 4.27) \times 10^{+3}$$

(اشما) :

$$\begin{cases} \sigma_A = (-1.42 - 8.53 - 4.27)\,10^{+3} = -14.22 \text{ MPa} \\ \sigma_B = (-1.42 - 8.53 + 4.27)\,10^{+3} = -5.68 \text{ MPa} \\ \sigma_C = (-1.42 + 8.53 + 4.27)\,10^{+3} = +11.38 \text{ MPa} \\ \sigma_D = (-1.42 + 8.53 - 4.27)\,10^{+3} = +2.84 \text{ MPa} \end{cases}$$

* برای یافتن توزیع تنش گرافیکی عمل می کنیم :



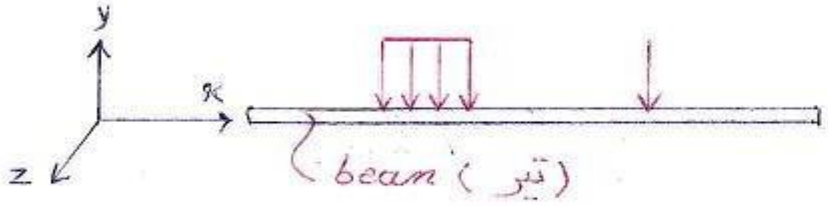
* در دو نقطه که تنش صفر است تار خنثی از آن دو نقطه می گذرد .

* از تشابه هندسی مثلثها :

$CE = 100$ mm

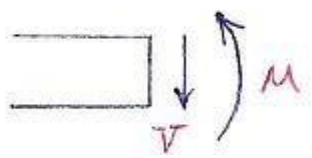
$AF = 125$ mm

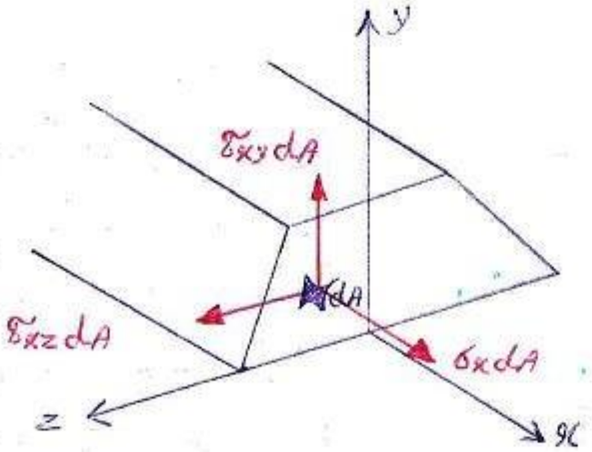
نیروهای برشی (V_z و V_y) :



(بارگذاری جانبی)

* باید دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی را رسم کنیم.



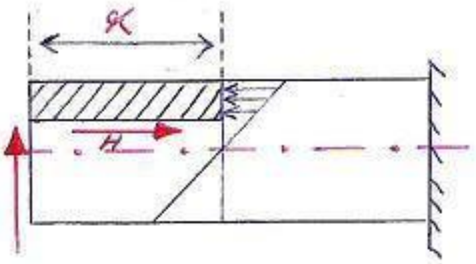


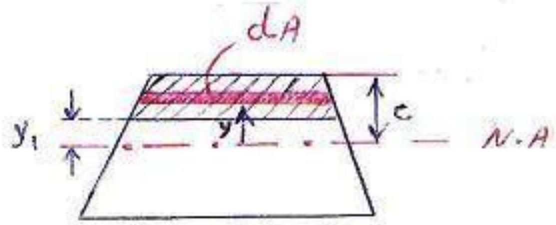
$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow \int \tau_{xy}\, dA = -V$$

$$\Sigma F_z = 0 \longrightarrow \int \tau_{xz}\, dA = 0$$

$$M = P \cdot x$$

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -\frac{P \cdot x y}{I}$$





$$\sigma_x \, dA = -\frac{Pxy}{I}\, dA$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad H - \int \frac{Pxy}{I}\, dA = 0$$

$$H = \frac{Px}{I} \int_{y=y_1}^{y=c} \underbrace{y\, dA}_{Q}$$

(Q) همان سطح آن قسمت از تیر است که می‌خواهیم بررسی کنیم با چه نیروئی چسب آن کنده می‌شود، یا با چه نیروئی توسط ابزار برش کنده می‌شود:

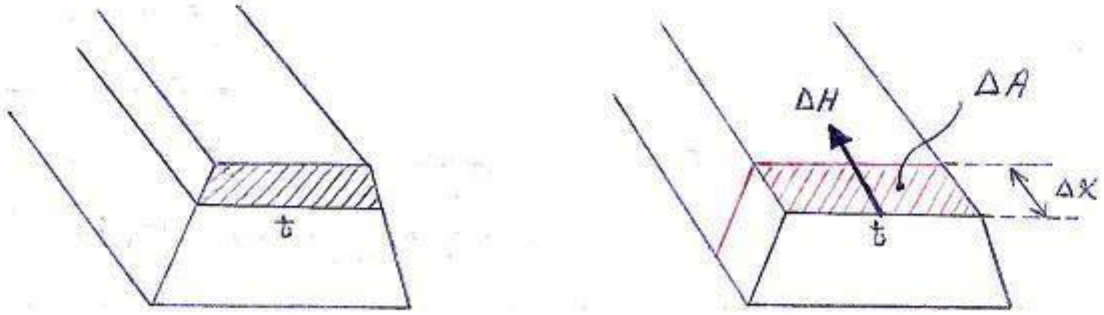
$$Q = \int_{y=y_1}^{y=c} y\, dA = A\bar{y}$$

$$H = \frac{P.Q}{I} . x$$ نیروی برشی

$$q = \frac{H}{x} = \frac{PQ}{I}$$ shear Flow جریان برش

* در شرایطی که انواع بارهای گسترده و متمرکز را داریم بجای P نیروی برشی لازم در هر مقطع را از روی دیاگرام یافته و قرار می‌دهیم.

* برای طراحی به تنش برشی احتیاج داریم :



* به فرض قسمت فوقانی را بر می داریم (مطابق شکل) :

$$\Delta A = t\,\Delta x$$

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\Delta H = q\,\Delta x = \frac{VQ}{I}\,\Delta x$$

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ \times \Delta x}{I \times t \times \Delta x} \longrightarrow$$

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

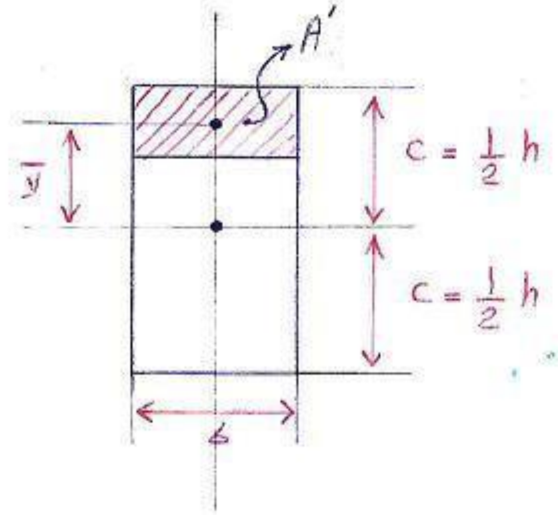
* I - برای کل سطح مقطع محاسبه می شود.
* Q - فقط ممان اول سطح هاشور خورده است.
* I و Q هردو نسبت به $N.A$ محاسبه می شوند.

* اگر بجای چسب، میخ داشتیم بازهم نیروی برشی را حساب می کنیم و تعداد میخها را هم حساب کرده و نیرو را بر تعداد آنها تقسیم می کنیم تا مشخص شود هر میخ چقدر نیروی برشی را تحمل می کند.

برای حل هر مسئله :

۱- یافتن مرکز سطح .
۲- یافتن تار خنثی .
۳- مشخص کردن سطح هاشور خورده و تعیین Q برای آن .
٤- محاسبه I برای کل سطح مقطع .

مثال -



$$* \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(c+y) \quad \leftarrow \quad «\frac{c-y}{2} + y» = \bar{y}$$

$$Q = A'\bar{y} = b(c-y) \times \frac{1}{2}(c+y)$$

$$* \quad Q = \frac{1}{2} b (c^2 - y^2)$$

$$* \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3} b c^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V \quad \xrightarrow[\text{کل سطح مقطع}]{A = 2bc}$$

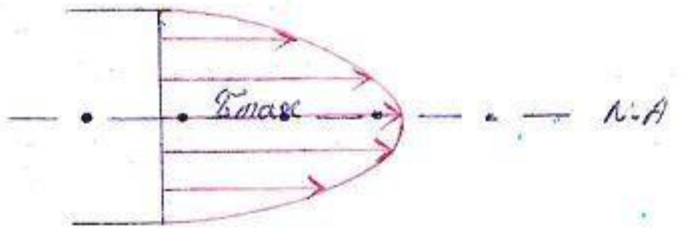
$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

* در بحث بارگذاری جانبی لایه‌ای که روی تار خنثی قرار گرفته - بیشترین ممان سطح را دارد و لذا بیشترین تنش برشی را دارد.

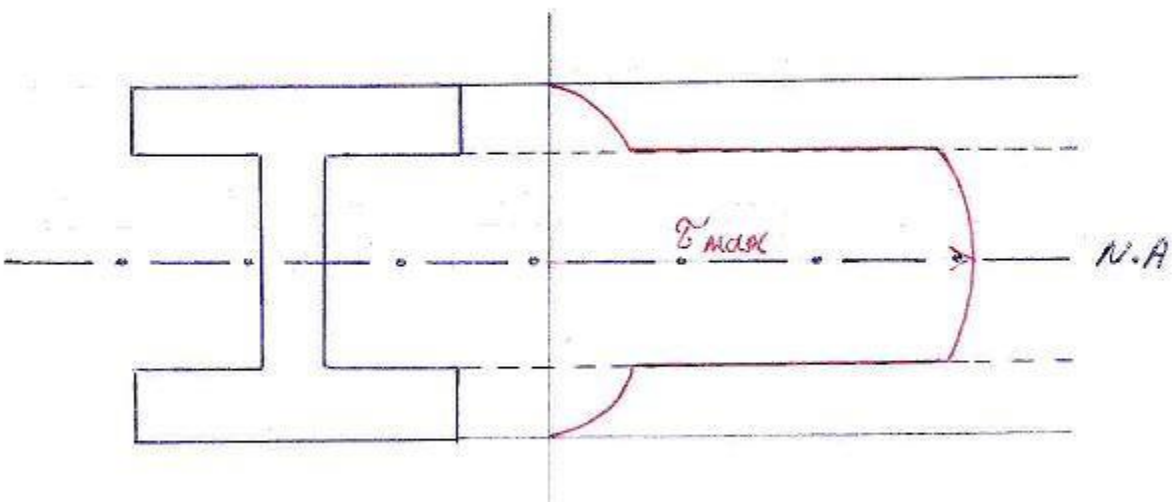
$$(\tau_{xy})_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$ «برای مقطع مستطیل»

* لذا از این پس از فرمول دقیق فوق بجای فرمول $\tau = \frac{V}{A}$ که در فصل (۲) بیان شد استفاده می کنیم. (برای سایر مقاطع هم محاسبه می‌شود)

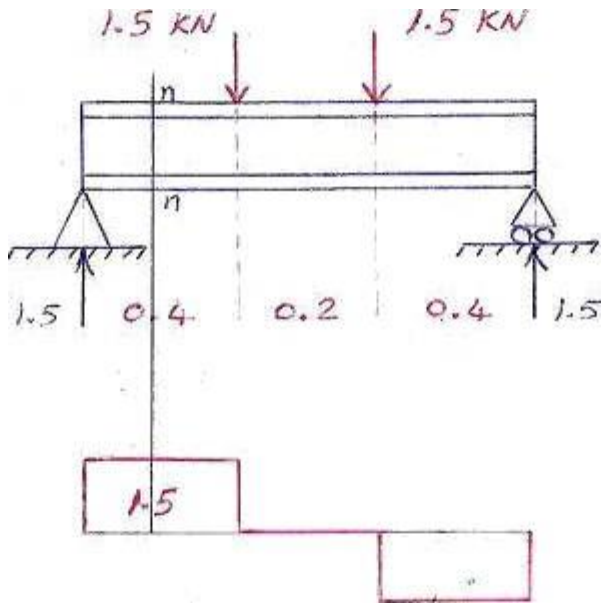
* چون در معادله y^2 داریم لذا توزیع تنش برشی در مقاطع مستطیلی بصورت سهمی است.

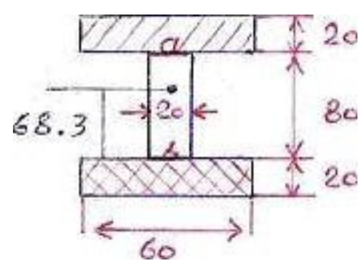


توزیع تنش در تیرآهنها :



* برای تقویت تیرآهن در برابر خمش بالهای آن و برای اثر نیروی برشی باید جان تیرآهن را تقویت کنیم



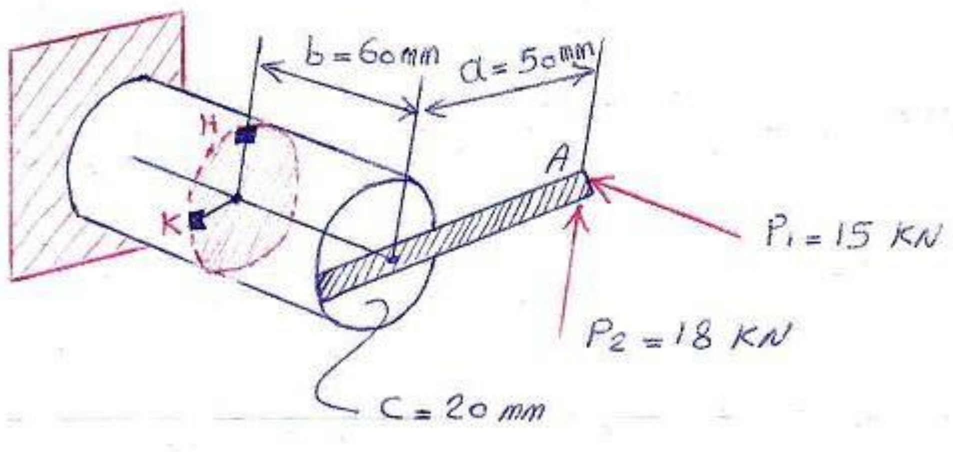


در اتصال a - $Q = A\bar{y}_1 = (0.100)(0.020)(0.0417) \quad 83.4 \times 10^{-6}\ m^3$

$I = 8\ 63 \times 10^{-6} \quad m^4$

$\tau = \dfrac{VQ}{} \quad 1500 \times 83.4 \times 10^{-6} \quad 725 \quad KPa$

مثال - مهم



* در صفحه‌ای به فاصله 60 از سر میله و در المانهای K و H تنشها را بیابید.

مجموعه عوامل -

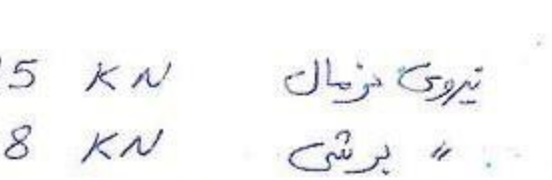
$F = P_1 = 15$ KN نیروی نرمال

$V = P_2 = 18$ KN " برشی

$T = P_2 \cdot a = 900$ N.m گشتاور پیچشی

$M_y = P_1 \cdot a = 750$ N.m گشتاور خمشی

$M_z = P_2 \cdot b = 1080$ N.m " "



* $A = \pi c^2 = 1.257 \times 10^{-3}$ m^2
* $I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi c^4 = 125.7 \times 10^{-9}$ m^4
* $J = \frac{1}{2} \pi c^4 = 251.3 \times 10^{-9}$ m^4
* $t = 40$ mm ضخامت

تنش در H :

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending}$$

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} - \frac{M_z C}{I_z} = \frac{-15 \times 10^3}{1.257 \times 10^{-3}} - \frac{1080 \times (0.02)}{125.7 \times 10^{-9}}$$

$* \ \sigma_x = -183.8 \ MPa$ (0.02 - فاصله تا تار خنثی)

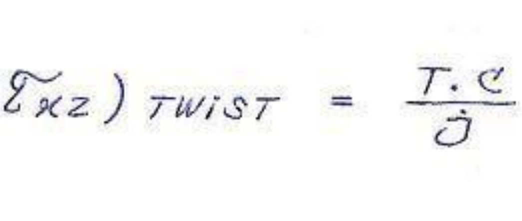
$$* \ \tau_{xz} = (\tau_{xz})_{TWIST} = \frac{T \cdot C}{J} = \frac{900 \times 0.02}{251.3 \times 10^{9}} = 71.6 \ MPa$$

تنش در K :

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y C}{I_y} \rightarrow$$

$* \ \sigma_x = 107.4 \ MPa$

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_{shear} - (\tau_{xy})_{TWIST}$$



* فرض می کنیم قسمت بالا می خواهد کنده شود و آن می شود سطح ها شور خورده.

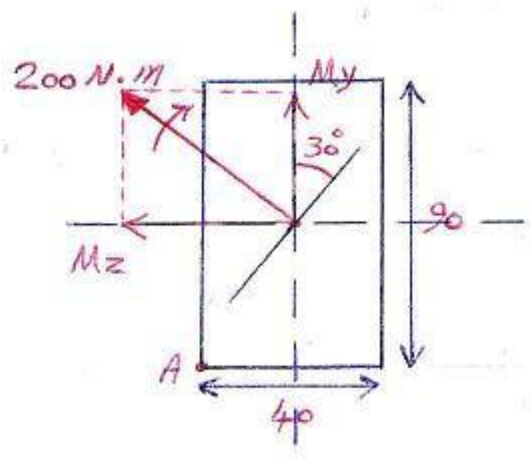
$$* \ Q = \frac{1}{2}\pi C^2 \times \frac{4C}{3\pi} = \frac{2}{3} C^3 = 5.33 \times 10^{-6} \ m^3$$

$$(\tau_{xy})_{«shear»} = \frac{VQ}{It} = \frac{18 \times 10^3 \times 5.33 \times 10^{-6}}{125.7 \times 10^{-9} \times 0.04} = 19.1 \ MPa$$

$$(\tau_{xy})_{«TWIST»} = 71.6$$

$$\Rightarrow * \ \tau_{xy} = 19.1 - 71.6 = -52.5 \ MPa$$

مثال - مهم -



یک تیر چوبی داریم
با مقطع مستطیلی.
بردار گشتاور در صفحه‌ای اثر
می کند که با قائم زاویه 30°
می سازد.

a - حداکثر تنش در تیر
b - زاویه تار خنثی با افق

(اگر نیرو هم بدهند روش حل همین است.)

$$M_z = 200 \cos 30^\circ = 173.2 \ N.m$$
$$M_y = 200 \sin 30^\circ = 100 \ N.m$$

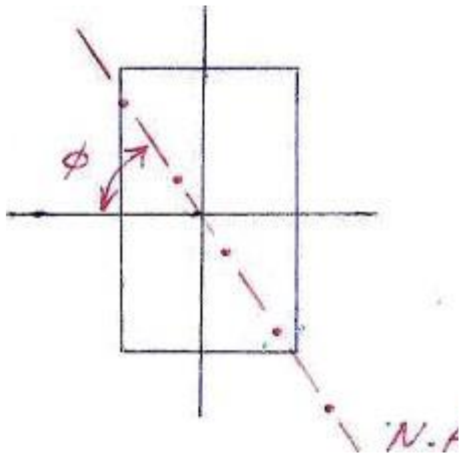
$$I_z = \frac{1}{12}(0.04)(0.09)^3 = 2.43 \times 10^{-6} \ m^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(0.09)(0.04)^3 = 0.480 \times 10^{-6} \ m^4$$

* حداکثر تنش در نقطه A است که هم بر اثر My کشیده می شود و هم بر اثر Mz. (جهت گشتاورهای My و Mz را با قانون دست راست می یابیم و نقاطی را که کشیده یا فشرده می شوند یعنی بالا و پایین تار خنثی مربوط به هر محور را معین می کنیم).

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{M_z\, y}{I_z} = \dfrac{173.2 \times 0.045}{2.43 \times 10^{-6}} = 3.21 \ MPa \\ \sigma_2 = \dfrac{M_y . z}{I_y} = \dfrac{100 \times 0.02}{0.480 \times 10^{-6}} = 4.17 \ MPa \end{cases}$$

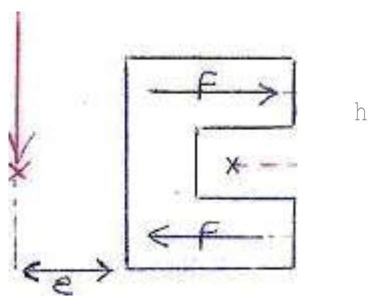
* حداکثر تنش فشاری _ مقدار ا   با علامت منفی در نقطه

* $\tan\phi$ $\frac{I_z}{I_y}$ $\tan\theta$ $\frac{43\ 2}{4800.}$ x $\tan 30$ 2.92



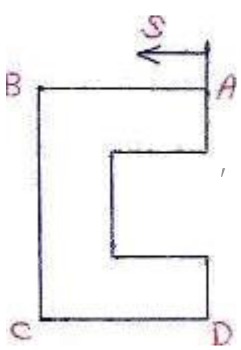
* همان
محوری که تر
است N.A را از خود
می راند.

مرکز برش -



$$F.h = V.e$$

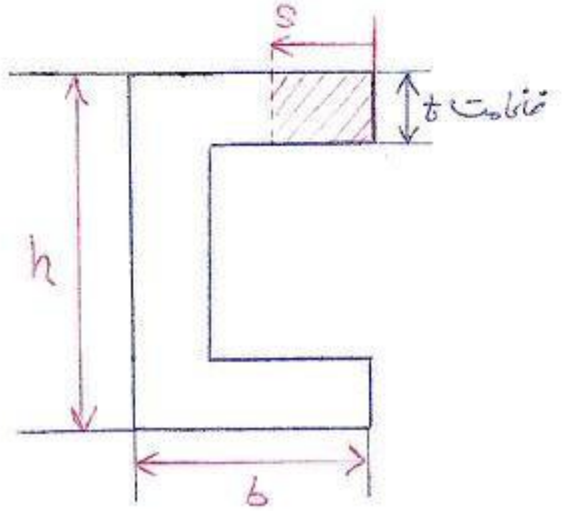
$$e = \frac{F.h}{V}$$



((جریان) $\tau . t$

$$F = \int_A^B q\,ds \qquad V = \int_B^C q\,ds$$

مثال- یک ناودانی داریم . مرکز برش آن مطلوب است.



$$* \quad q = \frac{VQ}{I} = \frac{V.s.t.h}{2I}$$

$$F = \int_0^b q\,ds$$

$$F = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds$$

$$F = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \qquad e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2 h}{4IV} = \frac{th^2b^2}{4I}$$

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$$I = \frac{1}{12}th^2(6b+h) \longrightarrow$$

$$e = \frac{3b^2}{6b+h} \longrightarrow e = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}$$

* برای محاسبه I یک مستطیل عمودی داریم و دو مستطیل افقی که هر یک را محاسبه می کنیم و برای افقی ها انتقال Ad^2 را هم داریم.