

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فیزیک پایه 1

(مکانیک)

استاد درس: مهندس قدیمی

دانشکده کشاورزی سمنگان

اسفند ماه ۱۳۹۸

فیزیک ۱: فصل اول

۱) یکاهای:

الف) یکاهای اصلی: همه کمیت‌های فیزیکی را می‌توان بر حسب سه مبنای جرم، طول و زمان بیان کرد. یکای کمیت‌های اصلی به ترتیب کیلوگرم (kg)، متر (m) و ثانیه (s) می‌باشد.

ب) یکاهای فرعی: غیر از کمیت‌های اصلی باقی کمیت‌های فیزیکی ترکیبی از کمیت‌های اصلی اند به همین دلیل یکاهای فرعی نامیده می‌شوند. به طور مثال سرعت ترکیبی از دو یکای متر و ثانیه است (سرعت $\leftarrow \text{m/s}$) و چگالی ترکیبی از دو یکای کیلوگرم و متر است (چگالی $\leftarrow \text{kg/m}^3$).

۲) تبدیل یکاهای:

این قسمت را با یک مثال شروع می‌کنیم. اگر بفوایم کیلومتر بر ساعت را به متر بر ثانیه تبدیل کنیم $(\text{km/h} \rightarrow \text{m/s})$ ابتدا باید بدانیم هر کیلومتر چند متر و هر ساعت چند ثانیه است. سپس با یک تناسب به جواب می‌رسیم.

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} & 1 \frac{\text{km}}{\text{h}} &\times \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{10}{36} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 1 \text{ h} &= 3600 \text{ s} \end{aligned}$$

حال برعکس برای تبدیل متر بر ثانیه به کیلومتر بر ساعت $(\text{m/s} \rightarrow \text{km/h})$ باید اطلاعات زیر را بدانیم:

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= \frac{1}{1000} \text{ km} & 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} &\times \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = \frac{36}{10} \text{ km} \\ 1 \text{ s} &= \frac{1}{3600} \text{ h} \end{aligned}$$

جدول زیر در تبدیل‌ها به ما کمک می‌کند.

پیشوند	نماد	پیشوند	ضریب	نماد	پیشوند
اگزا	E	10^{18}	دسی	d	10^{-1}
پتا	P	10^{15}	سانتی	c	10^{-2}
ترا	T	10^{12}	میلی	m	10^{-3}
گیگا	G	10^9	میکرو	μ	10^{-6}
مگا	M	10^6	نانو	n	10^{-9}
کیلو	k	10^3	پیکو	p	10^{-12}
هکتو	h	10^2	فمتو	f	10^{-15}
دکا	da	10^1	آتو	a	10^{-18}

3) نمایش اعداد با توانهای 10 و ارقام با معنی:

الف) نمایش با توانهای 10: معمولاً بهتر است اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک را به صورت مضربی از توانهای مثبت یا منفی 10 نشان دهیم. به طور مثال عدد $0.000,000,000,3$ را بصورت 3×10^{-10} و $0.000,000,000,000,005$ را بصورت 5×10^{-15} نشان می دهیم. در بسیاری از موارد به جای توانهای 10 می توان از پیشوندها استفاده کرد به طور مثال 5×10^{-15} را می توان بصورت 5fm نمایش داد

ب) ارقام با معنی: اندازه گیری ها همیشه با مقداری خطا همراه است مثلاً اگر نتیجه اندازه گیری طول معینی 15.6m و عدم قطعیت این اندازه گیری 2% باشد (که برابر 0.3 است) مقدار واقعی می تواند عددی بین 15.3m و 15.9m باشد پس باید آن را بصورت $15.6 \pm 0.3m$ نوشت. اما اغلب عدم قطعیت را به جای نمایش صریح، به طور ضمنی با ارقام با معنی نمایش می دهند. به طور مثال 15.6 دارای سه رقم با معنی است که رقم آخر آن ممکن است دقیق نباشد.

روش تعیین ارقام با معنی:

- 1- صفرهایی که نماینده ی توان هایی از 10 باشد جزء ارقام با معنی نمی باشند ولی صفرهای آخر به حساب می آیند. مثلاً عدد 0.002560 دارای 4 رقم با معنی است 256.0×10^{-5}
- 2- تعداد ارقام با معنی 12000 مشخص نیست ولی عدد 12000.0 دارای 6 رقم با معنی است.
- 3- در ضرب و تقسیم تعداد ارقام با معنی نتیجه نهایی باید برابر با کمترین تعداد ارقام با معنی ای باشد که در عوامل این عملیات موجود است. به طور مثال:

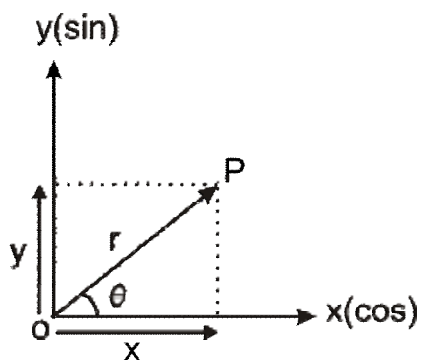
$$\frac{36.479 \times 2.6}{14.58} = 6.387 = 6.4$$

- 4- در عملیات جمع و تفریق باید کمترین تعداد رقم های اعشاری را در نتیجه نهایی منظور کرد.
- $$17.524 + 2.4 - 3.56 = 16.364 = 16.4$$

4) چارچوب مربع و دستگاه مقدمات:

مکان یک جسم تنها نسبت به یک چارچوب مربع معنی دارد. چارچوب مربع ممکن است یک موجود فیزیکی مثل میز ، اتاق و یا حتی خود کره زمین باشد.

مکان نسبت به دستگاه مختصات (که به چارچوب مربع متصل است) مشخص می شود. در دستگاه مختصات دکارتی محورها بر هم عمودند و هم‌بزرگ را در مبدأ قطع می کنند و با X, Y, Z نمایش داده می شوند. در دو بعد مکان نقطه P را می توان با مختصات دکارتی اش (x, y) مشخص کرد.



$$x = r \cos q$$

$$y = r \sin q$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

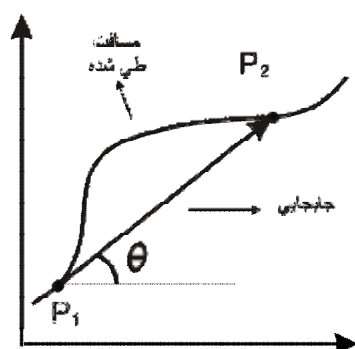
$$q = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

پایان فصل اول

فصل دوم: بردارها

به کمیت‌های عددی (کمیت‌هایی که وابسته به جهت نیستند) **اسکالر** گفته می‌شود. مثال: زمان، دما، چگالی و
 به کمیت‌هایی که علاوه بر مقدار به جهت نیز نیاز دارند کمیت‌های **بردار** می‌گویند. مثل نیرو.
 اسکالرها از قواعد جبر معمولی تبعیت می‌کنند اما بردارها از قواعد خاصی پیروی می‌کنند که به مجموعه آنها **جبر برداری** می‌گویند.

مسافت نمونه ای از کمیت‌های اسکالر است و به مسیر طی شده بستگی دارد اما جابجایی نمونه ای از کمیت‌های برداری است و به مسیر و مسافت بستگی ندارد.



کمیت‌های برداری را به همراه یکسانی در بالای نام آنها نمایش می‌دهیم. $\vec{A}$ نماد یک کمیت برداری است. اندازه بردار $\vec{A}$ اسکالر مثبتی است که به صورت $|\vec{A}|$ یا به سادگی با A نمایش می‌دهند. در نمایش هندسی یا نموداری هر بردار بصورت یک پاره خط جهت دار است که طول آن متناسب با اندازه بردار می‌باشد و می‌تواند در هر مکانی نسبت به مبدأ دستگاه مختصات قرار داشته باشد.

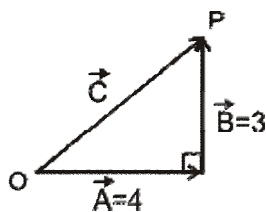
نکته:

- 1) از آنجا که بردار دارای اندازه و جهت است هر کدام از این دو تغییر کند دیگر بردار قبلی نخواهد بود.
- 2) هیچگاه یک اسکالر برابر با یک بردار ($A = \vec{B}$) نمی‌شود و هیچگاه می‌توان یک اسکالر را با بردار جمع ($A + \vec{B}$) کرد و کاملاً بی‌معنی است.
- 3) بردارها را میتوان در یک عدد فاصله یا اسکالر ضرب نمود و اگر در عددی منفی ضرب شود جهت آن عوض می‌شود.

جمع بردارها

$$\Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

اندازه بردار برآیند



برای روشن شدن مفهوم جمع دو بردار، دو بردار جابجایی را با هم جمع می‌کنیم. مطابق شکل بالا شصتی از نقطه O، 4 متر به سمت شرق و بعد 3 متر به طرف شمال می‌رود. جابجایی اول را با $\vec{A}$ و جابجایی دوم را با $\vec{B}$ نشان می‌دهیم.

در این جابجایی شصتی از نقطه O به P منتقل شده است که جابجایی خالص نام دارد و آن را با $\vec{C}$ نمایش و به $(\vec{C})$ جمع برداری یا برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌گویند.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

نکته: توجه کنید که معادله بالا یک معادله برداری است و طبق فرمول بالا یا قضیه فیثاغورث $(C = \sqrt{A^2 + B^2})$ اندازه $\vec{C}$ برابر با 5 است و چنانچه مشاهده می‌شود برآیند دو بردار با مجموع اندازه آنها برابر نیست.

$$|\vec{A} + \vec{B}| \neq A + B$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = A + B \Leftrightarrow \text{دو بردار موازی و هم جهت باشند}$$

نکته: جمع و تفریق دو بردار یک بردار است و نه یک عدد.

روش نموداری جمع دو بردار: ابتدا یکی از بردارها را رسم می‌کنیم و سپس بردار دیگر را به صورتی رسم می‌کنیم که دم بردار دوم بر سر بردار اول منطبق باشد. حال از دم بردار اول به سر بردار دوم رسم می‌کنیم تا بردار برآیند به دست آید.



خواص جمع بردارها:

$$1) \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

جابجایی پذیری

$$2) (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

انجمن پذیری

تفریق بردارها

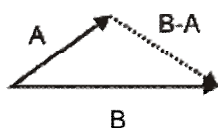
$$\Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

اندازه تفریق دو بردار

تفریق دو بردار حالت خاصی از جمع دو بردار است.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

روش رسم: ابتدا دو بردار را از یک مبدأ رسم می‌کنیم و در این صورت تفاضل دو بردار $(\vec{A} - \vec{B})$ برداری است که انتهای $\vec{B}$ را به انتهای $\vec{A}$ وصل می‌کند.

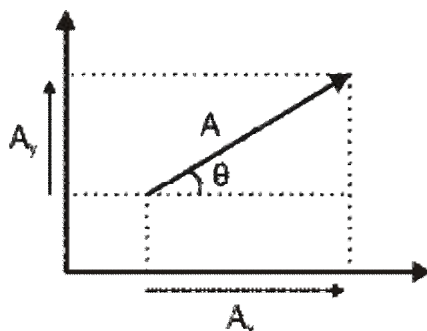


نکته:

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

مؤلفه های بردار یکه

روش نموداری برای جمع بردارها روشی وقت گیر و غیر دقیق است و در سه بعد به این سادگی نمی باشد. برداری مثل $\vec{A}$ را می توان به جای مشخص کردن با اندازه و جهت (θ, A) با مؤلفه هایش (13/10/2007) نشان داد.

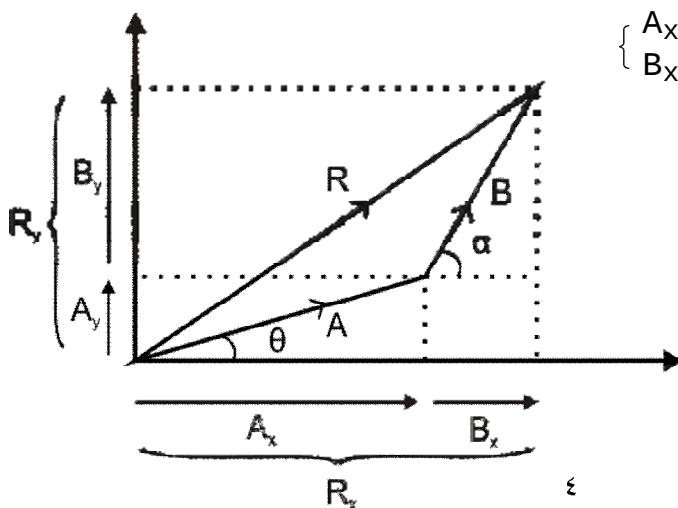


$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \end{cases}$$

یکی از مزیت های روش تجزیه ای کار کردن با مؤلفه ها در آسانتر و دقیق کردن جمع بردارهاست.

مثال: برای این که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با هم جمع کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم.



$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ B_x = B\cos\alpha \end{cases}, \begin{cases} A_y = A\sin\theta \\ B_y = B\sin\alpha \end{cases}$$

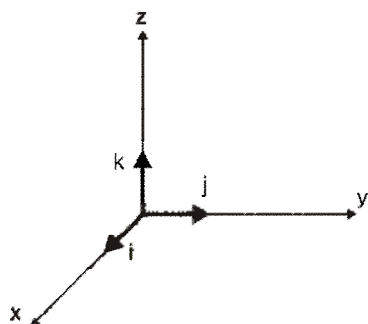
$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

بردارهای یکه

برای ساده تر کردن عملیات مربوط به بردارها معمولاً از سه بردار یکه $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ که به ترتیب با محورهای x ، y و z موازی اند استفاده می‌کنیم. بردار یکه کمیت بدون بعدی است که فقط برای مشخص کردن جهت در فضا به کار می‌رود.

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$



به طور کلی هر بردار را می‌توان به صورت حاصل جمع سه بردار که هر یک موازی با یکی از محورهای مختصات است بیان کرد.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

و اندازه آن بصورت $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ بدست می‌آید.

نکته: اگر دو بردار با هم برابر باشند مؤلفه‌های نظیر به نظیر آنها با هم برابرند.

$$\vec{A} = \vec{B} \rightarrow A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\rightarrow A_x = B_x, A_y = B_y, B_z = B_z$$

بنابراین:

ضرب اسکالر

نتیجه حاصل از این ضرب یک عدد یا اسکالر است.

$$1) \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$2) \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\rightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \Rightarrow \text{یک عدد می باشد}$$

فواصل ضرب اسکالر:

- (1) جابجایی پذیری $\vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{B}$
- (2) توزیع پذیری $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- (3) اگر θ صفر درجه باشد آنگاه $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$
- (4) اگر θ برابر 90 درجه باشد آنگاه $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

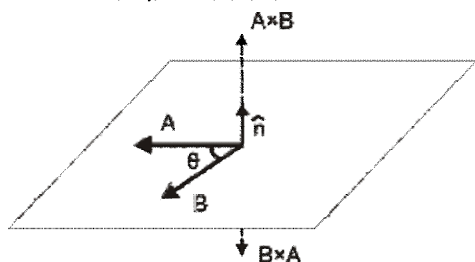
نکته: زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

ضرب برداری:

ضرب برداری (یا چلیپایی) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n}$ که θ برابر زاویه کوچکتر میان بردارها می باشد.



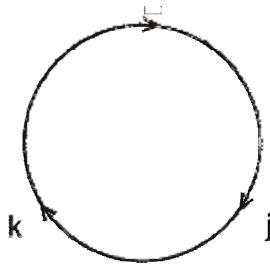
حاصلضرب برداری یک بردار است.

نکته: بردار حاصلضرب برداری بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است.

فواصل ضرب برداری

- (1) جابجایی پذیر نیست $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$
- (2) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$
- (3) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- (4) $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$

نکته: $\vec{A} \times \vec{A} = 0$



$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

ضرب برداری را بوسیله دترمینان فیلی راحت میتوان انجام داد و همان نتیجه را گرفت.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

پایان فصل دوم

فصل 3: حرکت یک بعدی

سینماتیک: توصیف پیکونکی حرکت اجسام در فضا و زمان.

جابجایی: برداری است که فقط به مکان های اولیه و نهایی بستگی دارد و به جزئیات حرکت و نوع مسیر وابسته نیست.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

تندی متوسط: عبارت است از مسافت طی شده به زمان سپری شده

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت سپری شده}}{\text{زمان سپری شده}}$$

سرعت متوسط: برابر است با جابجایی به زمان.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت لحظه ای: برابر است با سرعت متحرک در هر لحظه یا شیب نمودار مکان - زمان در هر لحظه

$$v = \frac{da}{dt}$$

فرمول فاص: سرعت متوسط متحرکی که $\frac{m}{n}$ مسیری را با سرعت v_1 و $\frac{b}{a}$ آن را با سرعت v_2 طی کرده برابر است با:

$$\frac{1}{v} = \frac{\frac{m}{n}}{v_1} + \frac{\frac{b}{a}}{v_2}$$

شتاب متوسط:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{مدت زمان}}$$

نکته: منفی بودن علامت شتاب الزاما به معنی کاهش سرعت نیست. به طور کلی اگر v و a هم علامت باشند حرکت تند شونده و در غیر این صورت کند شونده است.

اگر شتاب ذره ای در Δt ثابت باشد، سرعت متوسط آن را می توان با فرمول زیر مناسبه کرد.

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

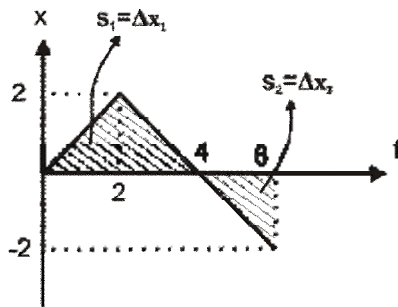
استفاده از مسافت ها:

در این قسمت می خواهیم بررسی کنیم که چگونه می توان X را از نمودار سرعت - زمان و V را از نمودار شتاب - زمان بدست آورد.

به طور کلی مسافت زیر نمودار سرعت - زمان برابر با جابجایی است.

$$\Delta x = v \Delta t$$

اگر مسافت بالای نمودار باشد جابجایی مثبت و اگر پایین نمودار باشد جابجایی منفی است.

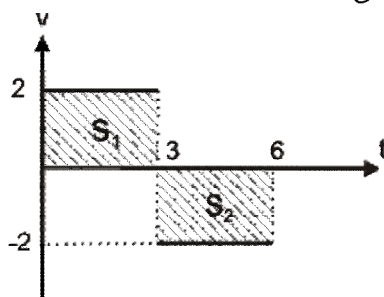


$$\Delta X = S_1 + S_2$$

$$\Delta X = \Delta X_1 - \Delta X_2$$

به طور کلی مسافت زیر نمودار شتاب - زمان برابر با Δv است.

اگر مسافت بالای نمودار باشد شتاب تند شونده است و تغییرات سرعت و مسافت مثبت و اگر پایین نمودار باشد شتاب کند شونده است و تغییرات سرعت و مسافت منفی است.



$$\Delta v = a \Delta t$$

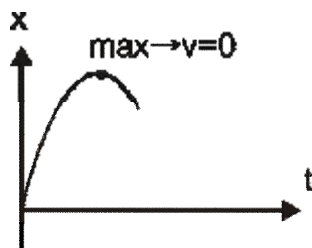
$$\Delta v = S_1 + S_2 \Rightarrow \Delta v = 6 - 6 = 0$$

استفاده از نمودار:

$\ddot{u}$ مشتق جابجایی برابر با سرعت و مشتق سرعت برابر با شتاب است.

$\ddot{u}$ در نمودار مکان - زمان هرگاه نقاط $\max$ و $\min$ وجود داشته باشد، مشتق جابجایی برابر صفر و

در نتیجه سرعت در آن نقاط برابر صفر خواهد بود.



$\ddot{u}$ در حرکت یکنواخت برای اینکه جهت حرکت عوض شود باید سرعت برابر صفر شود

$\ddot{u}$ اگر نمودار سرعت - زمان از محور t عبور کند نتیجه اینکه v صفر شده و مسیر حرکت تغییر کرده است.

معادلات سینماتیک در حرکت با شتاب ثابت:

$$x = vt + x_0$$

$$v = at + v_0$$

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \Delta t$$

$$\Delta x = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v) t \rightarrow \text{مستقل از شتاب}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (2t - 1) + v_0 \rightarrow \text{وابستگی در ثانیه m}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 a \Delta x \rightarrow \text{مستقل از زمان}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

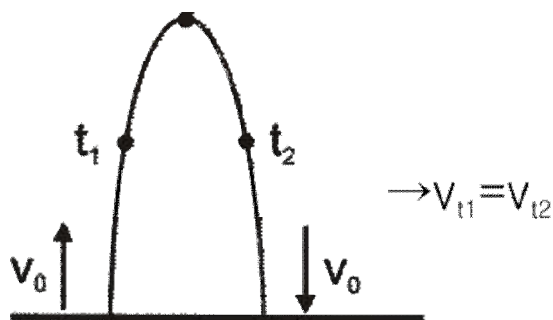
سقوط آزاد در راستای قائم:

در سقوط آزاد و پرتاب در راستای قائم a به $-g$ تبدیل می شود و در این صورت اگر سرعت رو به بالا باشد، مثبت و اگر رو به پایین باشد منفی در نظر گرفته می شود.

نکته:

ü در پرتاب در راستای قائم سرعت در هر نقطه از رفت و برگشت برابر است.

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$



ü اگر زمان های رفت و برگشت t_1 و t_2 باشد t اوج برابر است با

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

ü در نقطه اوج $v=0$ است.

معادلات در راستای قائم:

$$v = v_0 - gt$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

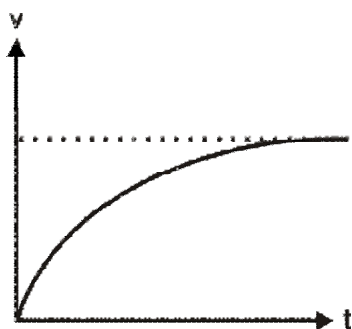
$$y = y_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v) t \rightarrow \text{مستقل از شتاب}$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

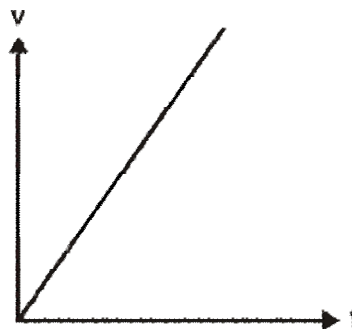
$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y \rightarrow \text{مستقل از زمان}$$

سرعت هر: اجسامی که از ارتفاع نسبتاً زیاد سقوط می کنند شتاب در آنها ثابت نمی ماند بلکه به تدریج کم می شود و اگر مدت سقوط کافی باشد حتی شتاب در آنها صفر می شود و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهند و این امر به دلیل وجود مقاومت هوا می باشد.



در حضور مقاومت هوا



در خلأ

پایان فصل سوم

فصل 4 : لفتی و حرکت دو بعدی

قانون اول نیوتن:

هر جسمی حالت سکون یا حالت حرکت یکنواخت را روی خط راست حفظ می کند مگر ناپاها شود در اثر نیرویی که به آن وارد می شود حالتش را تغییر دهد که این قانون شامل خاصیتی به نام لفتی (اینرسی) در همه اجسام می شود.

حرکت دوبعدی:

در فضای سه بعدی، بردار مکان را بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

اگر ذره ای از نقطه P_1 در مکان r_1 به نقطه P_2 در مکان r_2 برود جابجایی آن عبارتست از:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

در اینجا هم مانند حالت یک بعدی سرعت متوسط را برابر با جابجایی به مدت سپری شده تعریف می کنیم.

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

با توجه به اینکه

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

پس سرعت لحظه ای برابر است با:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

به همین ترتیب شتاب لحظه ای:

$$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

معادلات در شتاب ثابت:

در معادلات زیر: $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ و $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} (\vec{v}_0 + \vec{v}) t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

با توجه به اینکه ضرب اسکالر دو بردار برابر با یک عدد است ($\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$) پس معادله مستقل از زمان به این صورت است:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

در مورد حرکت در دو بعد در صفحه (x, y) رابطه برداری بالا بصورت 4 معادله برای x و 4 معادله برای y تعریف می شود.

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{0x} + v_x) t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2 a_x (x - x_0)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} (v_{0y} + v_y) t$$

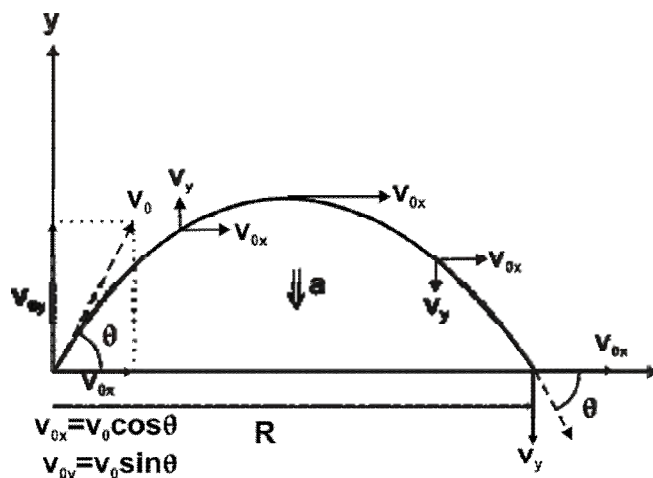
$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2 a_y (y - y_0)$$

حرکت پرتابه ها:

جسمی که در نزدیکی سطح زمین پرتاب شده باشد، به طور کلی دو حرکت مستقل دارد.

یک حرکت افقی با سرعت ثابت ($v_x = v_{0x}$) طبق قانون اول نیوتن در جهت افقی نیرویی به آن وارد نمی شود. و دیگری شتابدار در راستای قائم ($v_y = v_{0y} - gt$) ثقل زمین است.



پس با توجه به توضیحات بالا، در حرکت پرتابه ها:

$$a_x = 0 \quad , \quad a_y = -g$$

پس معادلات سینماتیک برای حرکت پرتابه :

(1) معادلات سرعت:

$$a) \quad v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$b) \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

$$c) \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

(2) معادلات مکان:

$$d) \quad x = v_{0x} \cdot t \rightarrow x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$e) \quad y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \rightarrow y = y_0 + v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

$$f) \quad v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) :$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

(3) معادله ترکیبی:

با جایگزین کردن $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ در معادله e داریم:

$$g) \quad y = (\tan \theta) x - \frac{g}{2 (v_0 \cos \theta)^2} x^2$$

(4) معادلات در نقطه اوج:

چون در نقطه اوج $v_y = 0$ پس داریم:

$$h) \quad \text{اوج } t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{طبق معادله e}$$

$$i) \quad \text{اوج } h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad \text{طبق معادله f}$$

نکته: در نقطه اوج $v_y = 0$ پس تنها v_x در نقطه اوج وجود دارد پس سرعت در نقطه اوج برابر است با:

$$\text{اوج } v = v_0 \cos \theta$$

برد پرتابه:

طبق معادله h زمان اوج برابر است با $\frac{v_0 \sin \theta}{g}$ پس این زمان، زمان نیمی از مسیر است پس زمان

$$T = 2 t_{\text{اوج}} = \frac{2 v_0 \sin \theta}{g}$$

کل مسیر برابر است با:

بنابر این ما زمان پرواز را در معادله d قرار می دهیم و برد را مناسبه می کنیم:

$$R = v_0 \cos \theta \times \frac{2 v_0 \sin \theta}{g} \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \sin 2\theta$$

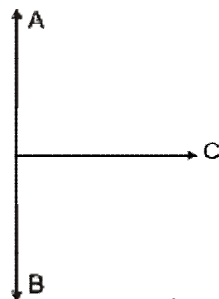
نکته: اگر دو پرتابه با سرعت یکسان و یکی با زاویه α و دیگری با زاویه θ پرتاب شود زمانی برد آنها برابر

$$\text{است که: } \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

نکته: بیشترین برد پرتابه با زاویه 45° می باشد.

$$\text{نکته: } \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

نکته: اگر سه پرتابه را با سرعت های برابر به سه شکل زیر پرتاب کنیم،
بلا فاصله بعد از پرتاب



$$a_A = g + a$$

$$a_B = g - a$$

$$a_C = \sqrt{g^2 + a^2}$$

پس شتاب A از همه بیشتر است و در مورد برخورد به زمین و زمان پرواز:

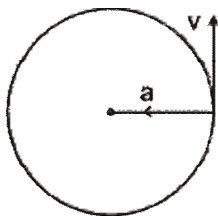
$$v_A = v_B = v_C \text{ و } t_A > t_B = t_C$$

نکته: اگر پرتابه در جهت افقی پرتاب شود زاویه پرتاب صفر است و در معادلات $\sin \alpha = 0$ و

$$\cos \alpha = 1 \text{ می شود.}$$

حرکت دایره ای یکنواخت:

در حرکت دایره ای یکنواخت شتاب همیشه به مرکزگرانش دارد و سرعت نیز همیشه مماس بر مسیر می باشد پس در یک نقطه شتاب و سرعت بر هم عمودند.



دوره تناوب: زمانی که طول می کشد تا ذره یک دور کامل بزند.

$$T = \frac{t}{n}$$

زمان $\rightarrow$ t
تعداد دور $\rightarrow$ n

سرعت زاویه ای:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

سرعت فیزی:

$$\vec{v} = r\omega$$

پس اندازه شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 \omega^2}{r} = r\omega^2$$

پارچوب مربع لغت:

همانطور که قبلاً در فصل ۱ گفته شد مکان و یا سرعت هر جسم فقط نسبت به اجسام دیگر معنی دارد. پارچوب مربعی که در آن قانون اول صلاقی باشد پارچوب مربع لغت نامیده می شود. در پارچوب مربع لغت جسمی که تحت اثر هیچ نیروی نباشد یا برآیند نیروها بر روی جسم صفر باشد یا ساکن می ماند یا با سرعت ثابت حرکت می کند.

هر پارچوبی که نسبت به یک پارچوب لغت با سرعت ثابت حرکت کند خودش هم یک پارچوب لغت است. اگر شتاب ذره ای در یک پارچوب لغت صفر باشد در تمام پارچوبهای دیگر نیز شتابش صفر است.

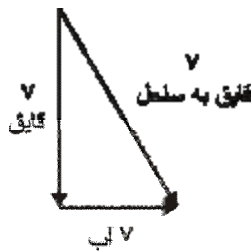
سرعت نسبی:

گاهی لازم است حرکت جسمی را نسبت به جسم دیگر که خودش هم نسبت به زمین در حرکت است، بررسی کنیم.

به طور مثال اتومبیلی با سرعت $35 \frac{m}{s}$ به دنبال اتومبیلی که با سرعت $30 \frac{m}{s}$ در یک جهت در حرکت هستند، از دیرگاه مسافر اتومبیلی که در حال حرکت با $30 \frac{m}{s}$ در حرکت است اتومبیل اول با سرعت $5 \frac{m}{s}$ حرکت می کند.

مثال: یک قایق موتوری عرض رودخانه ای را طی می کند. آب با سرعت $5 \frac{m}{s}$ به طرف شرق جریان دارد و سرعت قایق نسبت به آب $10 \frac{m}{s}$ است و قایق ران سر قایق را در طول مسیر به سمت ساحل نگه می دارد. سرعت قایق نسبت به ساحل چقدر است؟

حل: آب با سرعت $5 \frac{m}{s}$ به سمت شرق در حرکت است و قایق با سرعت $10 \frac{m}{s}$ نسبت به آب در حرکت است. پس:



$$\underline{v_{\text{قایق به ساحل}}^2 = v_{\text{آب}}^2 + v_{\text{قایق}}^2}$$

$$v_{\text{قایق به ساحل}} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11/2$$

پایان فصل چهارم

فصل 5: دینامیک ذره 1

دینامیک ذره:

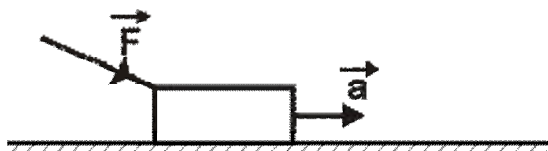
دینامیک شافه ای در علم است که حرکت شتابدار اجسام را با استفاده از مفهوم نیرو توضیح می دهد.

قانون دوم نیوتن:

اگر نیرویی خالص به جسمی اثر کند حرکت آن نمی تواند یکنواخت باشد یعنی شتاب می گیرد.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

نکته: باید توجه داشت که در حالت کلی جهت حرکت ذره با جهت نیروی وارد بر آن همیشه یکی نیست به طور مثال:



وزن:

قانون گرانش عمومی: بین هر دو ذره به جرم m و M که در فاصله r از یکدیگر واقع شده اند نیروی

جاذبه ای وجود دارد که این نیرو برابر است با

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

که در آن r فاصله بین دو ذره و G ثابت جهانی گرانش است و برابر است با

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

وزن جسمی به جرم m برابر است با $W = mg$ یا

$$W = \frac{GmM_E}{R_E^2}$$

پس

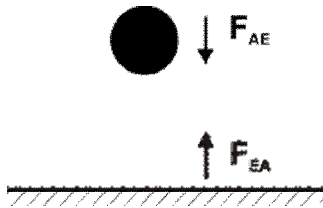
$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

نکاتی در مورد جرم و وزن:

جرم کمیت اسکالری است که بر حسب کیلوگرم سنجیده می شود در حالی که وزن یک جسم در نقاط مختلف از سطح زمین (به علت نامتقارن بودن زمین و ناهمگونی بودن جرم آن) یکسان نیست.

قانون سوم نیوتن:

اگر به جسم نیرو وارد کنیم آن جسم به ما نیرو وارد می کند اما در خلاف جهت. (به قانون سوم قانون عمل و عکس العمل نیز می گویند.)



راهنمای حل مسائل دینامیک:

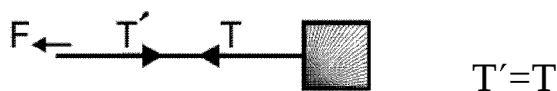
- 1) نموداری از وضعیت کلی مسئله می کشیم.
- 2) می بینیم به هر جسم چه نیروهایی از طرف محیط وارد می شود.
- 3) هر ذره می تواند محورهای مختصات مربوط به خود داشته باشد ولی بهتر است که یکی از محورها را در راستای شتاب ذره بگیریم.
- 4) با استفاده از نمودار جسم آزاد، قانون دوم نیوتن را در شکل مؤلفه ای اش می نویسیم.

$$\sum F_x = ma_x$$

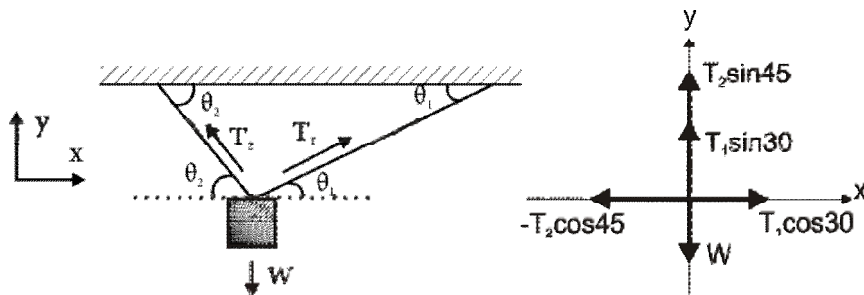
$$\sum F_y = ma_y$$

کشش طناب (نخ):

منظور از کشش طناب در یک نقطه این است که اگر آن نقطه از طناب را قطع کنیم و جای آن نیروسنج نصب کنیم مقدار نشان داده شده توسط نیروسنج همان کشش طناب در آن نقطه است. (البته در مسائلی که با آنها سروکار داریم جرم طناب ناچیز است.)



به طور مثال: وزنه ی 20N به وسیله دو رشته نخ آویزان است. اگر $\theta_1 = 30^\circ$ و $\theta_2 = 45^\circ$ باشد کشش در انتهای هر یک از آنها چقدر است؟



$$\sum F = 0$$

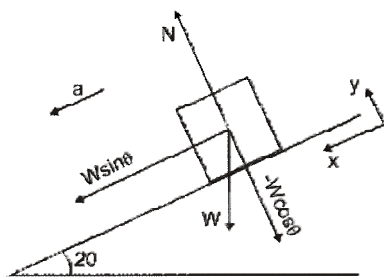
چون در حال تعادل است

$$1) \sum F_x = T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 45^\circ = 0 \rightarrow T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 45^\circ$$

$$2) \sum F_y = T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ - W = 0 \rightarrow T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ = W$$

در معادله ۱ داریم $T_2 = \frac{T_1 \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = 1/22 T_1$ پس در معادله ۲ قرار داده و جواب بدست می آید.

مثال: جسم به جرم 60 kg از سطح برون اصطکاکی که زاویه 20° درجه دارد پایین می آید. (الف) شتاب حرکت چقدر است؟



$$\sum F = ma$$

$$\sum F_x = mg \sin \theta = ma \rightarrow g \sin \theta = a$$

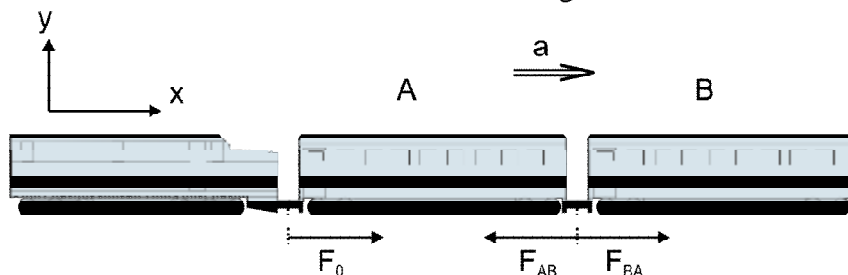
$$\rightarrow 9.8 (\sin 20^\circ) = a = 3.3 \text{ m/s}^2$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = 0$$

(ب) چه نیرویی از سطح شیب دار به جسم وارد می شود؟

$$N - mg \cos \theta = 0 \rightarrow N = mg \cos \theta = 550 \text{ N}$$

مثال: دو واگن A و B به جرم های $m_A = 1.2 \times 10^4 \text{ kg}$ و $m_B = 8 \times 10^3 \text{ kg}$ که به یکدیگر متصل اند می توانند آزادانه با اصطکاک ناچیز حرکت کنند. لوکوموتیوی با جرم 10^5 kg نیروی F_0 به واگن اول وارد می کند و واگن ها را با شتاب 2 m/s^2 به جلو می برد.



(الف) F_0 چقدر است؟

$$\sum F = ma$$

$$F_0 = (m_A + m_B) a$$

$$F_0 = (1.2 \times 10^4 + 0.8 \times 10^4) \times 2 = 4 \times 10^4$$

(ب) چه نیرویی از B به A وارد می شود؟

از آنجا که نیرویی که از B به A وارد می شود برابر است با نیرویی که از A به B وارد می شود، پس مسئله را می توان به دو شکل حل کرد.

$$F_{AB} = F_{BA}$$

روشن اول:

$$F_0 - F_{AB} = m_A a \rightarrow -F_{AB} = (1.2 \times 10^4 \times 2) - 4 \times 10^4 \\ \rightarrow f_{AB} = 1.6 \times 10^4$$

روشن دوم:

$$F_{BA} = m_B a = 0.8 \times 10^4 \times 2 = 1.6 \times 10^4$$

نکته: در مسائلی مانند این مسئله برای به دست آوردن جواب مسئله، راه‌های مختلفی وجود دارد که همه باید یک جواب داشته باشند.

وزن ظاهری:

وزن واقعی همان $W = mg$ است ولی وقتی انسان در آسانسوری باشد که با شتاب حرکت می‌کند، این وزن تغییر می‌کند که به آن وزن ظاهری می‌گویند.

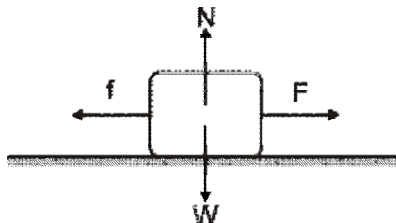
$W = mg$	اگر آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند
$W = m(g + a)$	اگر آسانسور با شتاب تند شونده رو به بالا حرکت کند
$W = m(g - a)$	اگر آسانسور با شتاب تند شونده رو به پایین حرکت کند
$W = m(g - a)$	اگر آسانسور با شتاب کند شونده رو به بالا حرکت کند
$W = m(g + a)$	اگر آسانسور با شتاب کند شونده رو به پایین حرکت کند

پایان فصل پنجم

فصل ششم: دینامیک ذره 2

اصطکاک:

نوعی نیروی تماسی است که با حرکت نسبی دو جسمی که با هم در تماس اند مخالفت می‌کند. اصطکاک معمولاً در خلاف جهت نیرو وارد می‌شود.



ویژگی‌های اصلی مربوط به اصطکاک:

- (1) نیروی اصطکاک متناسب با نیرویی است که دو جسم را به هم می‌فشارد.
- (2) نیروی اصطکاک بستگی محسوس به مساحت سطح تماس دو جسم ندارد.
- (3) نیروی اصطکاک در سرعت‌های نسبتاً کم مستقل از سرعت است.

نکته: نیروی اصطکاک به سطح بستگی ندارد یعنی اگر یک مکعب را یک بار از طرف سطح بزرگ و یک بار دیگر از طرف سطح کوچکش روی جسم دیگری قرار دهیم درست است که قله‌هایی که در تماس با پستی و بلندی‌های جسم دیگر قرار می‌گیرد کمتر است اما در عوض در اثر فشار بیشتری قرار دارد.

نکته: اگر دو جسم را سمباده بزنیم اصطکاک میان آنها کم می‌شود ولی اگر آنها را بیش از حد معینی صیقلی کنیم اصطکاک دوباره زیاد می‌شود.

اصطکاک ایستایی: برای به لغزش در آوردن هر جسمی روی یک سطح مستلزم اعمال حداقل معینی نیرو است. اما پس از شروع حرکت برای اینکه جسم با سرعت ثابتی به حرکتش ادامه بدهد نیروی کمتری لازم است. در حالت اول اصطکاک ایستایی و در حالت دوم اصطکاک جنبشی است.

(اصطکاک جنبشی $>$ اصطکاک ایستایی)

نیروی اصطکاک ایستایی را با f_s نشان می‌دهیم. اگر نیرویی که ما به جسمی وارد می‌کنیم صفر باشد f_s نیز صفر است. حال اگر این نیرو را افزایش دهیم f_s هم همپای آن بزرگ می‌شود البته تا زمانی که به یک مقدار ماکزیمم برسد. اگر نیرویی که وارد می‌کنیم از ماکزیمم بیشتر شود جسم حرکت می‌کند. در سرعت‌های زیاد اصطکاک یا ثابت می‌ماند یا به تدریج کم می‌شود. در سرعت‌های کم نیز اصطکاک ترکیبی از اصطکاک جنبشی و ایستایی است.

نیروی که دو جسم را به هم می‌فشارد در واقع همان N است، پس اصطکاک جنبشی برابر است با:

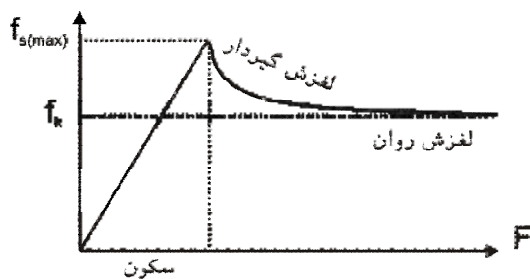
$$f_k = \mu_k N$$

نیروی اصطکاک ایستایی مقدار معینی ندارد ولی برای ماکزیمم آن می‌توانیم بنویسیم:

$$f_{s(max)} = \mu_s N$$

و در حالت کلی

$$f_s \leq \mu_s N$$



نمودار تغییر اصطکاک با نیروی اعمال شده

اصطکاک غلتشی:

توپ یا چرخ که روی زمین می‌غلتد دارای این نوع اصطکاک است که به صورت اصطکاک جنبشی (لغزشی) بسیار کوچکی است، جهت نیروی اصطکاک غلتشی بستگی به این دارد که غلتش آزاد باشد یا واداشته.

غلتش واداشته: مثل چرخ‌های عقب اتومبیل (البته اتومبیلی که نیرو از چرخ‌های عقب اعمال می‌شود) که در آن در محل تماس چرخ با زمین نیرویی به طرف عقب به جاده وارد می‌کند. (در اثر این نیرو است که در جاده‌های شالی سنگ ریزه‌ها به عقب پرتاب می‌شود) و جاده هم عکس‌العمل آن را رو به جلو به چرخ وارد می‌کند، پس در غلتش واداشته نیروی اصطکاک رو به جلو است، اگر نیروی چرخاننده بیش از حد اکثر نیروی اصطکاک ایستایی میان چرخ و جاده باشد غلتش با لغزش همراه می‌شود.



غلتش آزاد: در غلتش آزاد نیروی اصطکاک به سمت عقب می‌باشد و حرکت چرخ را کند می‌کند به همین دلیل است که وقتی چرخ در چاله می‌افتد موقع بیرون آمدن ضربه‌ای به عقب وارد می‌کند.

دینامیک حرکت دایره‌ای:

یک نمونه مهم از حرکت شتابدار، حرکت در مسیر دایره‌ای با سرعتی به مقدار ثابت است که به آن حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌گویند. شتاب در چنین حرکتی برابر است با $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$ که در آن v برابر است با سرعت و r شعاع دایره است.

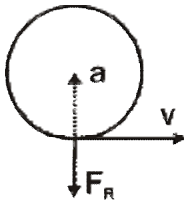
$$T = \frac{t}{n} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad v = \omega r$$

پس مقدار نیرویی که این شتاب را ایجاد می‌کند برابر است با:

$$F = ma \rightarrow F = m \frac{v^2}{r}$$

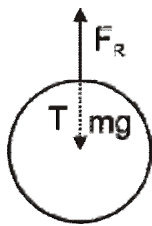
این نیرو همپوی با شتاب مرکزگر است که نیروی مرکزگرا نامیده می‌شود.

نکته: شتاب همیشه مرکزگر است و نیز سرعت مماس بر مسیر و بر هم عمودند.



دوران نخ (کشش نخ):

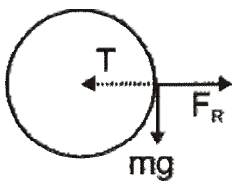
در دوران نخ فرمول کلی به صورت $T = F_R + mg \cos \alpha$ می‌باشد که α زاویه بین F_R و mg می‌باشد.



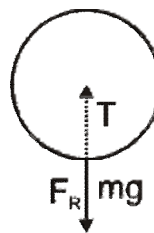
$$mg + T = F_R \rightarrow T = F_R - mg$$

و از طریق فرمول $\cos 180^\circ = -1$:

$$T = F_R - mg$$



$$T = F_R$$

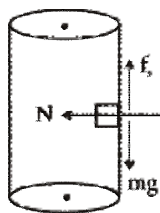


$$T = F_R + mg$$

پی بیشترین مقدار T در پایین‌ترین نقطه از مسیر می‌باشد.

مثال: جسمی را به دیواره‌ی داخلی استوانه‌ای تکیه داده بر روی سکویی می‌گذاریم و استوانه شروع به گردش می‌کند. حال وقتی سرعت دوران به حد کافی رسید سکو را از زیر جسم برمی‌داریم. حداقل ضریب اصطکاک چقدر باید باشد تا شیء نلغزد؟ شعاع استوانه $2m$ و دوره تناوب $2s$ است، $(n^2 = 10)$ ، $(g = 10)$

در این مواقع ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و بعد نیروهای عمودی و افقی را تفکیک می‌کنیم.



$$T = 2 \text{ s}$$

$$r = 2 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$v = r\omega$$

$$\mu_s = ?$$

$$f_s = mg$$

$$f_s = \mu_s N$$

$$N = F_R \rightarrow F_R = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\pi^2 r \rightarrow N = m\pi^2 r$$

$$f_s = mg \rightarrow \mu_s N = mg \rightarrow \mu_s m\pi^2 r = mg$$

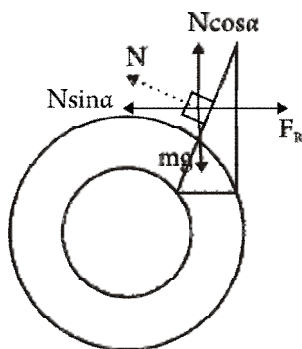
$$\mu_s = \frac{g}{\pi^2 r} = \frac{10}{10 \times 2} = 0.5$$

در جاده‌های مسطح:

در جاده‌های مسطح فکر می‌کنیم که $F_R = f_s$.

در جاده‌های با شیب عرضی:

در این گونه جاده‌ها برای اینکه ماشین در آنها نلغزد باید معادلات زیر برقرار باشد.



$$N \sin \alpha = F_R$$

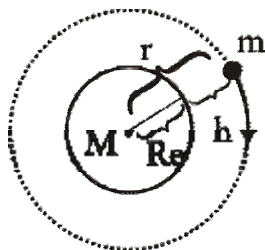
$$F_R = m \frac{v^2}{R}$$

$$N \cos \alpha = mg$$

$$\frac{N \sin \alpha}{N \cos \alpha} = \frac{m \frac{v^2}{R}}{mg} \rightarrow \tan \alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

مدارهای ماهواره‌ای:

در گردش ماهواره‌ها به دور زمین (یا سیاره به دور خورشید) اگر جرم جسم مرکزی خیلی بزرگتر از جرم جسمی باشد که در مدار قرار گرفته است، می‌توانیم جسم مرکزی را ثابت بگیریم، پس جرم m که حول جرم M حرکت دورانی یکنواخت دارد در این مورد قانون دوم به شکل زیر است که در آن G ثابت جهانی است.



$$r = R_e + h$$

$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$v_{\text{مداری}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \text{ بنابر این سرعت ماهواره‌ها برابر است با}$$

نکته: همانطور که از فرمول پیداست سرعت به جرم بستگی ندارد. سرعت به شعاع مدار بستگی دارد.

دوره تناوب مدار:

$$v = r\omega = r \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \sqrt{r^3} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = Kr^3$$

که در آن ضریب K را به جای $\frac{4\pi^2}{GM}$ قرار داده ایم که رابطه‌ی بالا به قانون سوم کپلر معروف است.

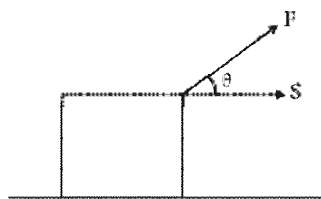
نکته: وقتی جسمی در حالت سقوط است، در حالت بی‌وزنی است.

پایان فصل ششم

فصل هفتم: کار و انرژی

در فصل قبل در بررسی دینامیک ذره دیدیم اگر مکان اولیه و سرعت اولیه ذره‌ای را بدانیم و تمام نیروهای وارد بر آن هم معلوم باشد می‌توان رفتار ذره را در تمام زمان‌های بعدی پیش‌بینی کرد. در واقع تمام مسائلی مکانیک کلاسیک با استفاده از قوانین نیوتن قابل حل اند. ولی در مواردی که نیروهای وارد بر ذره ثابت نباشد و با تغییر مکان و زمان تغییر کند حل آن بسیار پیچیده است. در این فصل به حل مسائل مکانیک به کمک مفهوم کار و انرژی می‌پردازیم.

کار نیروی ثابت:



$$W = FScos\theta$$

زاویه بین F و S × جابجایی × نیرو = کار

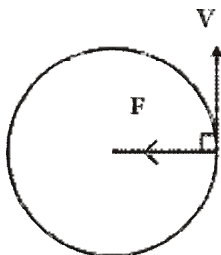
واحد کار ژول است. $1J = 1Nm$

نکته: کار انجام شده به نیرو (F) و جابجایی (F) و زاویه بین آنها (θ) بستگی دارد و مستقل از سرعت و شتاب جسم است.

نکته: اگر نیرو و جابجایی بر هم عمود باشند کار صفر است.

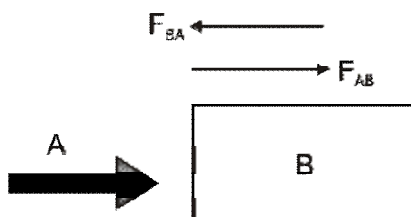
$$\theta = 90^\circ \quad W = FScos90^\circ = F \cdot S \cdot (0) = 0$$

نکته: نیروی مرکزگرایی انجام نمی‌دهد (مثل کشش نخ) چون همواره بر مسیر حرکت عمود است.



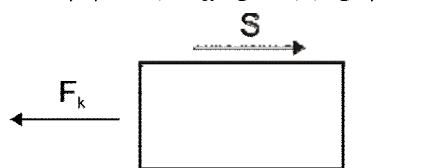
کار منفی و نیروی اصطکاک:

نیروی A جسم B را هل می‌دهد بنا به قانون سوم نیوتن نیرویی که از A به B وارد می‌شود برابر است با نیرویی که از B به A وارد می‌شود اما در خلاف جهت.



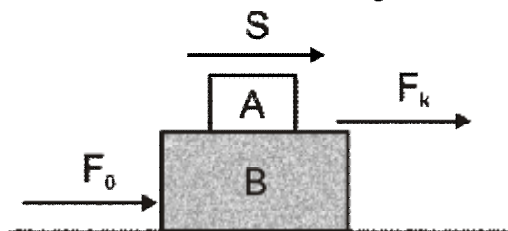
$$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA} \Rightarrow W_{AB} = -W_{BA}$$

جعبه‌ای روی سطح شیب‌دار زیری می‌لغزد و نیروی اصطکاک لغزشی F_k بر آن اثر می‌کند. این نیرو در خلاف جهت جابجایی جعبه می‌باشد. بنابراین زاویه بین F_k و S برابر 180° . $\theta = 180^\circ$



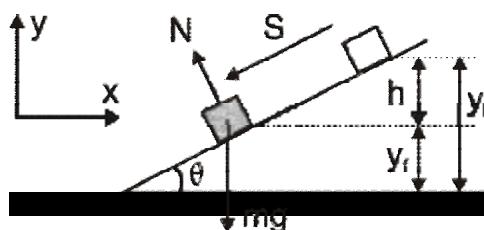
$$W_F = F_k S \cos\theta = -F_k S$$

توجه کنید که در مواردی هم می‌تواند کار و نیروی اصطکاک منفی نباشد. مطابق شکل زیر اگر نیروی F_0 را به جعبه‌ای وارد کنیم جعبه رو به جلو حرکت می‌کند.



در صورتی که اصطکاک ایستایی بین A و B کافی نباشد B نسبت به A به عقب می‌لغزد. اما نیروی اصطکاک لغزشی بین A و B به جلو می‌باشد که در این صورت کاری که اصطکاک روی قطعه A انجام می‌دهد مثبت است.

کار نیروی ثقل: (در این قسمت i برابر با مرحله اول و f برابر با مرحله دوم حرکت است) اگر جسمی روی سطح شیب‌دار به اندازه S جابجا شود در دستگاه مختصات که انتصاب کردیم نیروی ثقل عبارت است از:

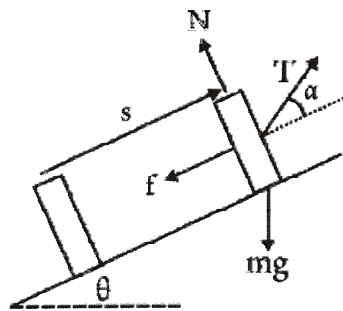


در این مثال $y_f - y_i = -h$ و شتاب رو به پایین است پس $-g$ در نظر می‌گیریم.

$$W_g = -mg (y_f - y_i) = mgh$$

پس به صورت کلی اگر حرکت رو به بالا باشد $W_g = -mgh$ و اگر رو به پایین باشد $W_g = mgh$.

مثال: اسکی‌بازی به جرم 40kg توسط سیم نقاله به اندازه 20m روی تپه‌ای به شیب $\theta = 15^\circ$ جابجا می‌شود. کشش سیم نقاله برابر $T = 250\text{N}$ و زاویه آن نسبت به سطح شیب‌دار $\alpha = 30^\circ$ است. اگر $\mu_k = 0.1$ ، کار هریک از نیروهای وارد بر اسکی‌باز بقدر است و چه کار خالصی روی او انجام می‌شود؟



مل‌نچهار نیروی وارد بر اسکی‌باز در شکل مشخص شده‌اند، از شرط $\sum F_y = 0$ داریم
 $N = mg \cos \theta - T \sin \alpha = 397 - 125 = 254 \text{ N}$
 بنابراین $f = \mu N = 25.4 \text{ N}$ است، با استفاده از $W = FS \cos \theta$ کارها را حساب می‌کنیم:

$$W_T = \vec{T} \cdot \vec{s} = Ts \cos 30^\circ = +4330 \text{ J}$$

$$W_f = \vec{f} \cdot \vec{s} = fs \cos 180^\circ = -fs = -508 \text{ J}$$

$$W_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = 0$$

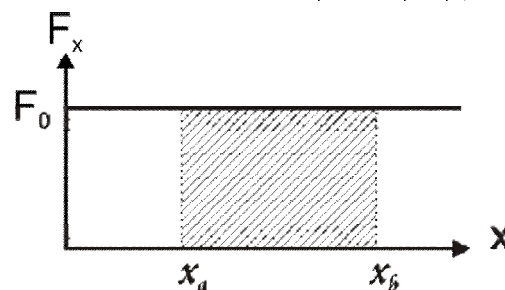
$$W_g = m \vec{g} \cdot \vec{s} = mgs \cos (90^\circ + 15^\circ) = -2030 \text{ J}$$

کار خالصی که روی جسم انجام شده است برابر با جمع جبری تک‌تک این کارهاست، یعنی
 $W = W_T + W_f + W_N + W_g = 1.79 \text{ kJ}$

که در واقع همان کاری است که نیروی براینر انجام می‌دهد.

کار نیروی متغیر در یک بعد:

نکته: کار برابر است با مساحت زیر نمودار F بر حسب x :



کاری که فنر انجام می‌دهد:

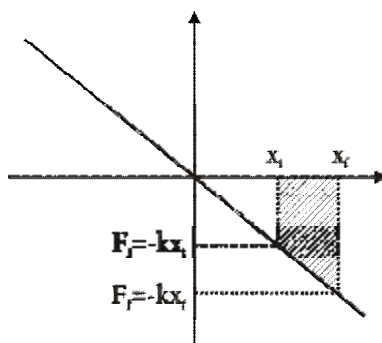
رابطه نیروی کشش فنر (F_s) با جابجایی انتهای فنر نسبت به وضعیت تعادلش به صورت زیر است:

$$F_s = -kx$$

(قانون هوک)

که در این فرمول k ثابت فنر و x جابجایی است.

با توجه به نمودار جابجایی فنر از i تا f کار نیروی فنر از x_i تا x_f برابر است با مساحت ناحیه هاشور خورده یا تداخل دو مثلث در زیر نمودار

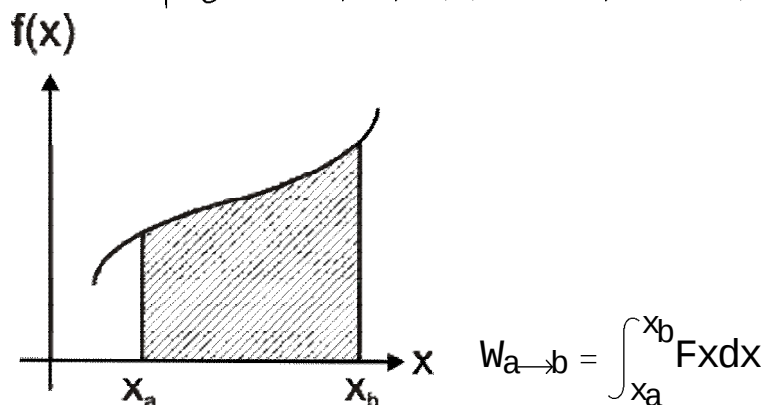


$$W_s = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2) \quad \text{یا} \quad W_s = \frac{1}{2} F_f x_f - \frac{1}{2} F_i x_i$$

توجه کنید که گاهی قانون هوک بر حسب نیروهای خارجی (مثلا نیرویی که شصن باید به فنر وارد کند تا آن را در می آید $F = +kx$ بکشد) نوشته می شود که در این صورت قانون هوک به صورت

نکته: کار نیروی فنر فقط به نقطه ابتدا و انتها بستگی دارد.

در حالت کلی وقتی نیرو تابعی از مکان باشد برای مناسبه کار از انتگرال گیری استفاده می کنیم.



علامت این کار بستگی به Fx و همچنین حدود انتگرال دارد اگر حدود انتگرال را عوض کنیم مثل این است که جابجایی معکوس شده باشد.

$$W_{a \rightarrow b} = -W_{b \rightarrow a}$$

اگر فنری نسبت به حالت تعادلش از x_i تا x_f جابجا شود، کار این جابجایی برابر است با:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

تغییه کار - انرژی در یک بعد:

اگر نیروی فاصل F جسمی را به اندازه Δx جابجا کند

$$W = F\Delta x = ma\Delta x$$

اما چون شتاب ثابت است داریم:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 a\Delta x$$

پس

$$W = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

K کمیت اسکالری است که انرژی جنبشی ذره نامیده می شود.

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

به صورت کلی:

$$W = \Delta K$$

تغییرات انرژی جنبشی برابر است با کار فاصل.

انرژی جنبشی: معیاری است از کار فاصل که باید روی جسم انجام شود تا سرعت آن از صفر تا مقدار معینی برسد.

توان:

توان عبارت است از آهنگی که کار با آن انجام می‌شود.

توان متوسط:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

یکای SI توان J/s است (که به افتخار جیمز وات) وات (نامیده می‌شود).

توان برابر است با:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

یعنی توان در هر لحظه برابر است با نیرو در سرعت لحظه‌ای.

نکته: یکای دیگر توان اسب‌بشار است که با hp نشان داده می‌شود. ($1hp = 746W$)

کار و انرژی در سه بعد:

نیروی که مقدار و جهتش در 3 بعد تغییر کند می‌تواند بصورت تابعی از بردار مکان $\vec{r}$ یا سه مؤلفه x, y, z بیان کرد.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \theta ds$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

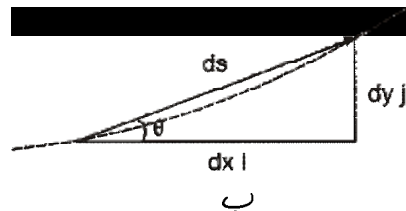
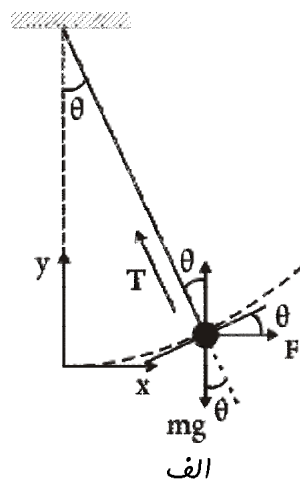
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_A^B F_z dz$$

برای مثال اگر نیرویی که کار را انجام می‌دهد نیروی ثقل باشد چون این نیرو فقط مؤلفه قائم دارد:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \vec{g} \cdot d\vec{s} = - \int_{y_A}^{y_B} mg dy = -mg (y_B - y_A)$$

یعنی کار نیروی ثقل مستقل از طول و شکل مسیر است و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد.

مثال: نیروی افقی F به طور فیللی آهسته کلوله یک آونک ساده را از وضعیت قائم تا وضعیتی که نخ آونک با راستای قائم زاویه θ_0 می‌سازد حرکت می‌دهد. اندازه این نیرو ضمن حرکت طوری تغییر می‌کند که کلوله در هر لحظه در حال تعادل است کاری که نیروی F روی وزنه انجام می‌دهد چقدر است؟



حل: وضعیت سیستم و نیروهای وارد بر کلوله در شکل نشان داده شده است. چون کلوله شتاب ندارد بر ایند نیروهای وارد بر آن در هر امتداد صفر است:

$$\sum F_x = F - T \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

اگر T را از دو معادله بالا حذف کنیم نتیجه می شود

$$(i) F = mg \tan \theta$$

رابطه بالا نشان می دهد که F با تغییر θ چگونه تغییر می کند. چون نیرو طبق صورت مساله فقط در جهت افقی است داریم $F = F_x$. جابجایی کوچک $d\vec{s}$ در مسیر دایره ای طبق شکل ب عبارت است از $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ پس خواهیم داشت

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx$$

$$(ii) = mg \tan \theta dx$$

در شکل ب می بینیم که $\tan \theta = dy/dx$ ، یعنی $dy = \tan \theta dx$ است و معادله (ii) به صورت $dW = mg dy$ در می آید. بنابراین

$$W = \int_0^{y_0} mg dy = mgy_0$$

$$= mg(L - L \cos \theta_0) = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

که در آن L طول نخ آونگ است. نکته جالب این است که جواب فقط شامل جابجایی در راستای قائم، $y_0 = L(1 - \cos \theta_0)$ است

پایان فصل هفتم

فصل هشتم: پایستگی انرژی

انرژی پتانسیل:

وقتی جسمی را تا ارتفاعی بالا می‌بریم، جسم در آن ارتفاع دارای انرژی می‌باشد که در سطح زمین آن را نداشته و به واسطه تغییر وضعیت یا موقعیت جسم حاصل شده است که به آن انرژی پتانسیل می‌گویند.

انرژی پتانسیل: انرژی است که به وضعیت نسبی دو یا چند ذره که با یکدیگر برهم‌کنش دارند بستگی دارد.

انرژی پتانسیل و کار فاری:

عامل کار فاری می‌تواند انرژی پتانسیل یک سیستم را تغییر بدهد.

$$W_{\text{فاری}} = \Delta U = U_f - U_i$$

آنچه اهمیت دارد تغییرات انرژی پتانسیل می‌باشد بنابراین می‌توان مربع انرژی پتانسیل یعنی $U = 0$ را در هر جای دلخواهی که برایمان راحت‌تر است انتخاب کنیم. مثلاً برای ذره‌ای که در نزدیکی سطح زمین حرکت می‌کند می‌توان هر سطح افقی مانند کف یک اتاق را سطح انرژی پتانسیل بگیریم.

نبرهای پایستار:

کاری است که فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد.

شکل ریاضی کار نیروی ثقل $W_g = -mg(y_f - y_i)$ و کار نیروی فنر $W = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$ نشان

می‌دهد که اگر نقطه اولیه بر نقطه نهایی منطبق باشد $W = 0$ می‌شود.

نکته: کار نیروی پایستار در یک سفر رفت و برگشت صفر است.

به طور مثال: مکعبی روی سطح شیب‌دار رو به بالا پرتاب می‌شود. کار نیروی ثقل در مرحله رفت

$W_g = -mgh$ و در مرحله برگشت $W_g = +mgh$ است. در نتیجه کار نیروی ثقل در رفت و برگشت

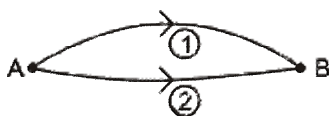
$W_g = 0$ می‌باشد. ولی کار نیروی اصطکاک در رفت $W_f = -fd$ و در برگشت $W_f = -fd$ است پس

در رفت و برگشت $W_f = -2fd$ می‌باشد.

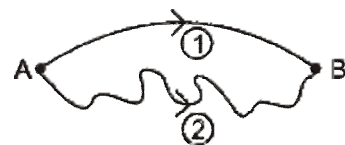
نکته: کار نیروی پایستار در هر مسیر بسته‌ای صفر است.

$$W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = 0$$

نکته: در دو مسیر زیر کار نیروی پایستار با هم برابر است.



$$W_1 = W_2$$



نکته: برای اینکه کار نیروی پایستار به مسیر بستگی نداشته باشد لازم است که نیرو فقط تابعی از مکان باشد

نه تابعی از سرعت یا زمان.

نکته: انرژی پتانسیل را فقط برای نیروهای پایستار می‌توان تعریف کرد چون فقط کار چنین نیروهایی است که به مسیر بستگی ندارد.

در تعریفی $W = \Delta U$ فیزیکی که قبلاً از انرژی پتانسیل گرفته‌ایم چون سرعت ثابت بود پس $\Delta K = 0$ است. کار خالص که روی جسم انجام می‌شود (مجموع کار نیروی خارجی (W_{Ex}) و کار نیروی پتانسیل داخلی (W_C)) مساوی صفر است. یعنی $W_{Ex} + W_C = 0$ یا $W_C = -W_{Ex}$ بنابراین می‌توان تغییرات انرژی پتانسیل را بدست آورد.

$$W_C = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

نکته: نیروی پایستار همیشه علاقه دارد که انرژی پتانسیل را به حداقل برساند. در 3 بعد: نیروی پایستار می‌تواند هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت تغییر می‌کند. برای یک تغییر بسیار کوچک (دیفرانسیلی) در انرژی پتانسیل که در اثر جابجایی بسیار کوچک حاصل می‌شود، می‌توان معادله بالا را بصورت زیر نوشت:

$$dU = -dW_C = -\vec{F}_C \cdot d\vec{s}$$

وقتی ذره از A تا B حرکت می‌کند.

$$U_B - U_A = \int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{s}$$

نکته: وقتی نیروی داخلی یک سیستم پایستار باشد کار خارجی که روی آن سیستم صورت می‌گیرد به صورت انرژی در سیستم ذخیره می‌شود و کاملاً قابل بازیابی است. اگر کار خارجی در حضور اصطکاک باشد، بخشی از آن صرف افزایش دما می‌شود که دیگر قابل بازیابی نیست.

تابع انرژی پتانسیل:

بررسی می‌کنیم که انرژی پتانسیل تابعی از مکان است. در فصل قبل دیدیم که کار نیروی ثقل روی جسم m که از y_i به y_f جابجا می‌شود عبارت است از:

$$W_g = -mg (y_f - y_i)$$

از معادله W_C هم می‌دانیم $W_g = -\Delta U_g = -(U_f - U_i)$ است پس از این دو معادله نتیجه می‌گیریم:

$$U_g = mgh$$

در مورد نیروی فنر هم وقتی که سر آن از x_i تا x_f جابجا می‌شود

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$

پایستگی انرژی مکانیکی:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

انرژی مکانیکی: که آن را با E نمایش می‌دهند و به صورت حاصل جمع انرژی جنبشی و پتانسیل $(E = K + U)$ تعریف می‌شود.

$$E_f - E_i = 0 \rightarrow E_f = E_i$$



$$K = \frac{1}{2} mv^2, \quad U = mgh$$

$$\frac{1}{2} mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2} mv_i^2 + mgh_i$$

بررسی سقوط آزاد توسط پایستگی انرژی:
در این صورت انرژی مکانیکی عبارت است از

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + mgh$$

و قانون پایستار به شکل زیر در می آید.

$$\frac{1}{2} mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2} mv_i^2 + mgh_i$$

جسمی سقوط آزاد را از حالت سکون در ارتفاع H آزاد کرده در این نقطه انرژی جنبشی آن $U = mgh$ است در ضمن با کم شدن ارتفاع سرعت جسم زیاد می شود یعنی جسم انرژی از دست

می دهد و انرژی جنبشی به دست می آورد ولی حاصل عبارت $E = U + K$ همواره ثابت می ماند.

در لحظه برخورد به زمین انرژی پتانسیل صفر و انرژی جنبشی ماکزیمم است، پس قانون پایستگی به شکل روبرو در می آید.



$$\frac{1}{2} mv_{\max}^2 = mgh$$

بررسی سیستم فنر و پایستار انرژی:

وزنه متصل به فنری روی سطح بدون اصطکاک قرار گرفته است. وزنه متصل به فنر را به اندازه $x = A$ می کشیم و رها می کنیم قبل از رها شدن انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل $\max$ است، یعنی $E = \frac{1}{2} kx^2$ و بعد از رها شدن فنر می فواید به حالت تعادل برگردد و در عین حرکت انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل می شود. به طوری که $E = K + U$ مقدار ثابتی می ماند. در نقطه تعادل فنر یعنی $x = 0$ تمام انرژی پتانسیل فنر به جنبشی تبدیل شده و در این نقطه $E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$ البته در چنین حرکتی وزنه به حرکتش ادامه می دهد و دوباره انرژی جنبشی به پتانسیل تبدیل می شود تا به $-A$ برسد (در واقع یک حرکت نوسانی است)

نکاتی درباره کاربرد اصل پایستگی انرژی مکانیکی در حل مسائل:

۱) در حالت کلی ممکن است بیش از یک ذره در انرژی جنبشی سیستم سهیم باشد و امکان دارد بیش از یک نوع انرژی پتانسیل (مثلا پتانسیل گرانشی و هم پتانسیل فنر) در کار باشد.

2) اگر اصل پایداری انرژی مکانیکی را به صورت $K_f + U_f = K_i + U_i$ به کار ببریم باید سطح مرجع پتانسیل ($U = 0$) را مشخص کنیم.

3) اگر از شکل $\Delta K + \Delta U = 0$ استفاده کنیم نیازی نیست که برای انرژی پتانسیل سطح مرجع در نظر بگیریم چون در این شکل فقط تغییرات این انرژی مطرح است، اما باید مواظب باشیم علامت این تغییرات درست تعیین شود.

مثال: تخته‌ای به جرم $m = 0.8 \text{ kg}$ به یک سر فنری با ثابت $k = 20 \text{ N/m}$ متصل است و روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد. فنر را به اندازه 12 cm می‌کشیم و رها می‌کنیم

الف) بیشترین سرعت تخته چقدر است؟

ب) وقتی فنر به اندازه 8 cm متراکم شده است سرعت تخته چقدر است؟

ج) در چه مکان‌هایی انرژی جنبشی تخته با انرژی پتانسیل فنر برابر است؟

د) در چه نقاطی سرعت تخته نصف سرعت ماکزیمم آن است؟

حل:

الف) ماکزیمم سرعت در جایی است که تمام انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی تبدیل شده باشد، یعنی در $x = 0$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \pm 0.6 \text{ m/s}$$

ب) پایداری انرژی مکانیکی در این مورد ایجاب می‌کند که

$$0 + \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k (A^2 - x^2)}{m}}$$

به ازای $A = 0.12 \text{ m}$ و $x = -0.08 \text{ m}$ خواهیم داشت $v = \pm 0.45 \text{ m/s}$. دو علامت مثبت و منفی حاکی از آن است که در هر نقطه معین سرعت می‌تواند در هر یک از دو جهت باشد، توجه کنید که به ازای انبساطی برابر با $x = +0.08 \text{ m}$ هم همین دو مقدار برای سرعت به دست می‌آید

ج) اگر انرژی‌های پتانسیل و جنبشی برابر باشند، هر یک باید نصف انرژی کل باشد، یعنی $k = U = \frac{1}{2} E$.

پس می‌توانیم بنویسیم

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} k A^2 \right) \Rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 0.085 \text{ m}$$

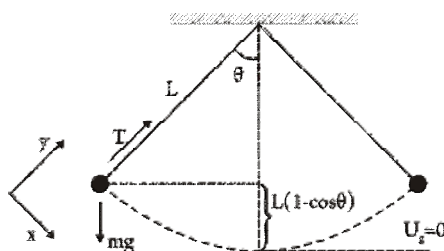
د) می‌فواهیم نقطه‌ای را پیدا کنیم که در آنجا $v = \frac{1}{2} v_{\max} = \pm 0.03 \text{ m/s}$ باشد (بنابر قسمت الف). پایداری

انرژی ایجاب می‌کند که داشته باشیم $\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$ ، که از آن نتیجه می‌شود

$$x = \sqrt{\frac{(kA^2 - mv^2)}{k}} = \pm 0.1 \text{ m}$$

پس به ازای هر سرعتی دو نقطه فواهیم داشت که به طور قرینه در دو طرف مبدأ واقع شده‌اند.

مثال: آونک ساده‌ای داریم که طول نخ آن $L = 2 \text{ m}$ و جرم کلوله‌اش $m = 2 \text{ kg}$ است. وقتی زاویه نخ آونک با راستای قائم $\theta = 35^\circ$ باشد سرعت کلوله آونک $v = 1.2 \text{ m/s}$ است. کشش نخ این آونک وقتی که کلوله:



الف) از پایین‌ترین نقطه مسیر

ب) از بالاترین نقطه مسیر

می‌گذرد مقدار است؟

حل: برای حل این مسئله باید هم از دینامیک و هم از اصل پایداری مکانیکی استفاده کنیم. نیروهای وارد بر کلوله در شکل نشان داده شده‌اند. معادله نیوتن در راستای نخ (y) عبارت است از:

$$(i) \quad T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{L}$$

می‌بینیم که برای پیدا کردن کشش نخ باید سرعت کلوله را داشته باشیم. سرعت را از ملازمات مربوط به انرژی به دست می‌آوریم. مربع پتانسیل را در پایین‌ترین نقطه مسیر انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که ارتفاع کلوله در هر وضعیت θ عبارت است از

$$y = L - L \cos \theta$$

انرژی مکانیکی سیستم (که همواره در عین حرکت نوسانی آهنگ ثابت می‌ماند) برابر است با

$$(ii) \quad E = \frac{1}{2} mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} (2 \text{ kg}) (1.2 \text{ m/s})^2 + (2 \text{ kg}) (9.8 \text{ m/s}^2) (2 \text{ m}) (1 - 0.82) = 8.5 \text{ J}$$

الف) در پایین‌ترین نقطه $\theta = 0$ است. بنابر این از معادله (ii) داریم

$$E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 + 0$$

که اگر $E = 8.5 \text{ J}$ را در آن قرار دهیم نتیجه می‌شود که $v = \pm 2.9 \text{ m/s}$ است. از معادله (i) داریم

$$T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L} = 19.6 + 8.5 = 28.1 \text{ N}$$

به صورت زیر در می آید (ii) است، پس معادله $v=0$ در بالاترین نقطه مسیر

$$E = 0 + mgL (1 - \cos \theta_{\max})$$

که با استفاده از مقدار $E = 8.5$ ج معلوم می شود $\cos \theta_{\max} = 0.783$ است، در این حالت (چون $v=0$ است) از معادله (i) فوایم داشت.

$$T = mg \cos \theta = 15.3 \text{ N}$$

انرژی مکانیکی و نیروهای ناپایستار:

اصل بقای انرژی مکانیکی را فقط می توان به سیستمی اعمال کرد که هیچ نیروی ناپایستاری (دافلی یا خارجی) کاری انجام ندهد. حالا می فوایم ببینیم که کار نیروی ناپایستار چه تغییری در ملاحظات مربوط به انرژی مکانیکی پرید می آورد.

قفیه کار-انرژی جنبشی می گوید که کار فالفی که روی یک ذره انجام می شود برابر با تغییرات انرژی جنبشی ذره است. در حالت کلی

$$W = W_C + W_{NC} = \Delta K$$

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U$$

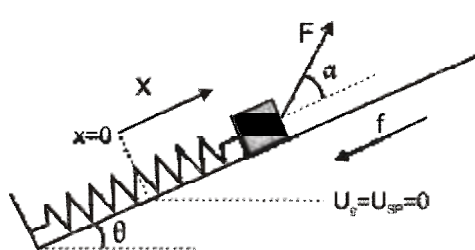
که در آن W_C کار نیروی پایستار و W_{NC} کار نیروی ناپایستار است.

$$\Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{NC}$$

در واقع معادله بالا اصلاح شده معادله انرژی مکانیکی برای مواردی است که نیروهای ناپایستار هم کار انجام می دهند و هالی از آن است که نیروهای ناپایستار موجب تغییر در انرژی مکانیکی می شود.

مثال: جسمی به جرم m که به فنری با ثابت k متصل است می تواند روی سطح شیب داری با زاویه شیب



حرکت کند. در ابتدا جسم ساکن است و فنر طول عادی اش را دارد. جسم با نیروی F که با سطح شیب داری زاویه α می سازد کشیده می شود. نیروی اصطکاک برابر با f است. شکل اصلاح شده قفیه کار-انرژی را برای این سیستم بنویسید.

حل: انرژی پتانسیل فنر در $x=0$ صفر است. چون حرکت از $x=0$ شروع می شود بهتر است که انرژی

پتانسیل ثقلی را هم در همین نقطه صفر بگیریم. در شروع حرکت $E_i = 0$ است و در ضمن حرکت داریم

$$E_f = K + U_g + U_s = \frac{1}{2} mv^2 + mgh + \frac{1}{2} kx^2$$

توجه کنید که $h = x \sin \theta$ است.

نیروهای F و f هر دو ناپایستارند. پس

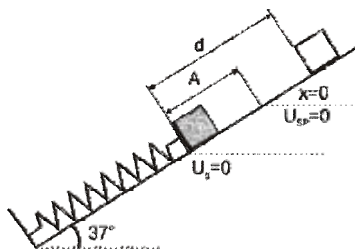
$$W_{NC} = Fx \cos \alpha - fx$$

بنابر این قضیه کار - انرژی برای این سیستم چنین است:

$$(\Delta E = E_f - E_i = W_{NC})$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgx \sin \theta + \frac{1}{2} kx^2 = Fx \cos \alpha - fx$$

مثال: در شکل زیر جرمی به جرم 0.2 kg را به فنری با ثابت 50 N/m تکیه داده و فنر را به اندازه 20 cm منقبض کرده ایم. اگر دستمان را برداریم جسم می تواند قبل از توقف به اندازه 50 cm روی سطح شیب دار به سمت بالا بلغزد.



الف) نیروی اصطکاک چقدر است؟

ب) سرعت جسم درست در لحظه ای که از فنر جدا می شود چقدر است؟

حل: اگر U_g را (به جای $x=0$) در پایین ترین نقطه صفر بگیریم، ضریب اش این است که مقادیر بعدی انرژی پتانسیل مثبت خواهند بود. می دانیم که انرژی مکانیکی شامل سه جمله است.

$$E = K + U_g + U_s$$

الف) K_i و K_f هر دو صفرند. $A = 0.2 \text{ m}$ و $d = 0.5 \text{ m}$ است. بنابر این خواهیم داشت:

$$E_i = \frac{1}{2} kA^2, \quad E_f = mgd \sin \theta$$

که اگر اینها را در معادله کار و انرژی قرار دهیم نتیجه می شود:

$$mgd \sin \theta - \frac{1}{2} kA^2 = -fd$$

با استفاده از معلومات مسئله $f = 0.82 \text{ N}$ به دست می آید.

ب) در این مورد E_i همان مقدار قبلی است، ولی E_f در $x=0$ برابر است با

$$E_f = \frac{1}{2} mv^2 + mgA \sin \theta$$

بنابر این

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgA \sin \theta - \frac{1}{2} kA^2 = -fA$$

که از آن $v = 2.45 \text{ m/s}$ به دست می آید.

نیروی پایستار و تابع انرژی پتانسیل:

می خواهیم ببینیم که چگونه می توان نیروی پایستار وابسته به یک تابع انرژی پتانسیل را پیدا کنیم. بنابر معادله $dU = -dW_c = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s}$ در جابجایی کوچک $d\vec{s}$ در $02/01/2002$ انجام می دهد با رابطه زیر به تغییر بسیار کوچک dU که در انرژی پتانسیل پدید می آید مربوط می شود.

$$dU = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s}$$

این معادله در یک بعد به صورت $dU = -\vec{F}_C \cdot d\vec{x}$ در می آید بنابراین:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

به طور کلی: هر مؤلفه‌ی یک نیروی پایستار برابر با منفی مشتق تابع انرژی پتانسیل در جهت همان محور است. علامت منفی به این معناست که نیرو در جهت کاهش انرژی پتانسیل است.

$$U_g = mgy \Rightarrow F_y = -\frac{dU}{dy} = -mg$$

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

پایان فصل هشتم